初等整数論 (3 回目) の解答

問題 3-1

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

問題 3-2

次で自然数 p を定める.

$$p = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid 1 < k < n, \quad k \mid n\}.$$

仮に p を合成数とすると,

$$1 < a < p, \quad a \mid p$$

を満たす整数 a がある. このとき,

$$1 < a < n, \quad a \mid n.$$

p の最小性から $a \geq p$ となり矛盾. よって p は素数であり, 取り方から $p \mid n$ である.

問題 3-3

$\gcd(x, x+3) = 1$ or 3 に注意する.

(i) $\gcd(x, x+3) = 1$ のとき. $x = s^2,\ x+3 = t^2\ (s, t \in \mathbb{N})$ と表せる.

$$3 = t^2 - s^2 = (t-s)(t+s)$$

であり, $t+s > t-s$ より $t+s = 3,\ t-s = 1$ を得る. よって $s = 1,\ t = 2$. つまり $(x, y) = (1, 2)$.

(ii) $\gcd(x, x+3) = 3$ のとき. $3 \mid x,\ 3 \mid y$ である. $x = 3u,\ y = 3v\ (u, v \in \mathbb{N})$ と表せる. このとき, $u(u+1) = v^2$ である. $\gcd(u, u+1) = 1$ より, $u = s^2,\ u+1 = t^2\ (s, t \in \mathbb{N})$ と表せる. よって

$$1 = t^2 - s^2 = (t-s)(t+s)$$

となるが, これは満たす自然数 s, t は存在しない.

(i), (ii) より $(x, y) = (1, 2)$.

問題 3-4

$n = 102! + 2$ とすればよい.