初等整数論 (5 回目) の解答

問題 5-1

$\gcd(11, 23) = 1$ より, 1 次合同式は法 23 で一意的に解を持つ. $23 - 2 \cdot 11 = 1$ より

$$(-2) \times 11 \equiv 1 \pmod{23}.$$

従って

$$x \equiv ((-2) \times 11) \times x \equiv (-2) \times 3 \equiv 17 \pmod{23}.$$

$0 \leq x < 50$ より, 求める解は $x = 17, 40$.

問題 5-2

$3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ より $(-6) \cdot 5 - (-4) \cdot 7 = -2 = 1 - 3$. ここで,

$$x = 3 + (-6) \cdot 5 = 1 + (-4) \cdot 7 = -27.$$

とすると, $x \equiv 3 \pmod 5$, $x \equiv 1 \pmod 7$. 従って $x \equiv -27 \equiv 8 \pmod{35}$ が解である.

問題 5-3

F_n を法 2 で考えると

$$0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots.$$

と周期 3 で繰り返す. 従って

$$F_{100} \equiv F_1 \equiv 1 \pmod 2. \quad (1)$$

次に F_n を法 3 で考えると

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, \ldots$$

と周期 8 で繰り返す. 従って

$$F_{100} \equiv F_4 \equiv 0 \pmod 3. \quad (2)$$

(1), (2) に関して連立合同式を解くと $F_{100} \equiv 3 \pmod 6$. 従って F_{100} を 6 で割った余りは 3.