

初等整数論 (6回目) の解答

問題 6-1

(1) フェルマーの小定理より $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. よって

$$3^{20} \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 13 \pmod{17}.$$

従って余りは 13.

(2) まず,

$$3 \times 3^{15} \equiv 1 \pmod{17}$$

に注意する. $6 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{17}$ より

$$3^{15} \equiv 6 \pmod{17}.$$

従って余りは 6.

(3) $3^{20} \equiv 13 \pmod{17}$ かつ $3^{20} \equiv 1 \pmod{5}$. 中国剰余の定理から $3^{20} \equiv 81 \pmod{85}$ (例題 5-2 の解き方を参照). よって余りは 81.

問題 6-2

1 から p^2 において p の倍数は

$$p, 2 \cdot p, 3 \cdot p, \dots, (p-1) \cdot p, p^2$$

の p 個である. よって

$$\varphi(p^2) = p^2 - p.$$

問題 6-3

(1) $98 = 2 \times 7^2$ より

$$\varphi(98) = 98 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 42.$$

(2) オイラーの定理より $3^{42} \equiv 1 \pmod{98}$. よって

$$3^{45} \equiv 27 \pmod{98}.$$

従って余りは 27.