集合論 (第 1 回)

1. 集合と元

ここでは, 数学を学ぶ上で最も基礎となる集合論について解説する. 初回は集合の基本的な用語を説明する. より詳細な内容は下記を参考のこと.

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.2–p.5.
- 「集合 · 位相入門」(松坂和夫 著) の p.3–p.11.

定義 1-1 (集合)
「5 以下の自然数の集まり」や「すべての実数の集まり」のようにある条件を満たすもの全体の集まりを**集合**という. また集合を構成する個々のものを**要素**または**元**という. 二つの集合 A, B の要素がすべて等しいとき $A = B$ で表し, そうでないとき $A \neq B$ で表す.

集合 A を「5 以下の自然数の集まり」とするとき, A の要素は $1, 2, 3, 4, 5$ である.

定義 1-2
数学の各分野でよく用いられる集合は固有の記号で表す.

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ自然数全体の集合, 整数全体の集合, 有理数全体の集合, 実数全体の集合, 複素数全体の集合を表す.

(2) 集合 A を $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のいずれかとするとき, $A[x]$ は A 係数多項式全体の集合を表す.

(3) 集合 A を $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のいずれかとするとき, $M_n(A)$ は各成分が A の元である n 次正方行列全体を表す.

次に用語をいくつか定義する.

定義 1-3
a が集合 A の要素であるとき, **「a は A に含まれる」**または**「a は A に属する」**といい, $a \in A$ で表す. a が A の要素でないとき, $a \notin A$ で表す.

例えば,

$$10 \in \mathbb{Z}, \quad -1 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

copyright © 大学数学の授業ノート

定義 1-4 (集合の表し方)
集合の表し方には次の 2 通りの方法がある.

(ア) 要素をすべて書き並べる方法.

(イ) 要素の条件を述べる方法. この場合は

$$\{x \mid x \text{ の条件 }\}$$

の形で表す. 集合 A の中で考える場合は

$$\{x \in A \mid x \text{ の条件 }\}$$

のように表す.

集合 A を「6 の正の約数の集まり」とする. A を (ア) の方法で表すと,

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}.$$

A を (イ) の方法で表すと,

$$A = \{x \mid x \text{ は } 6 \text{ の正の約数 }\}.$$

また A の元は自然数における 6 の約数とも言えるので

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は } 6 \text{ の約数 }\}$$

とも表せる.

例題 1-1
集合 $A,\ B,\ C$ を次で定める.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}, \quad B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, ...\}, \quad C = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

(1) A を (ア) の方法で表せ.

(2) B を (イ) の方法で表せ.

(3) C を (ア) の方法で表せ.

[解答]
(1) について.

$$A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}.$$

(2) について.

$$B = \{x \mid x \text{ はの正の偶数 }\}.$$

(3) 集合 C は A の元で正の偶数でないもの全体なので

$$C = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}.$$

$\square$

[補足]　例題 1-1 の集合 B は次のようにも表せる.

$$B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

問題 1-1　集合 $A,\ B,\ C$ を次で定める.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x < 0\},\quad B = \{1, 2, 3, ..., 10\},\quad C = \{x \in B \mid \sqrt{x} \in A\}.$$

(1) A を (ア) の方法で表せ.

(2) B を (イ) の方法で表せ.

(3) C を (ア) の方法で表せ.

定義 1-5

集合 A が有限個の要素からなるとき**有限集合**といい, その要素の個数を $|A|$ または $^{\#}A$ で表す. A が有限集合でないとき**無限集合**という. 要素を持たない集合を**空集合**といい ϕ で表す.

※ 次の同値が成り立つ.

$$A = \phi \iff |A| = 0.$$

例を挙げておく.

(1) $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$ はすべて無限集合である.

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき, $|A| = 5$ である.

(3) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < -1\}$ とする. $x^2 < -1$ を満たす実数 x は存在しないので $B = \phi$ である.

問題 1-2　実数 t に対して, 集合 A を

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = t\}$$

で定義する. このとき, $|A|$ を求めよ.

定義 1-6 (部分集合)
集合 A, B を考える. A の要素がすべて B に含まれるとき, すなわち

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成り立つとき, A は B の**部分集合**といい, $A \subseteq B$ で表す. A が B の部分集合でないとき, $A \not\subseteq B$ で表す. また $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$ のとき $A \subsetneq B$ で表す.

※1　空集合 ϕ はすべての集合の部分集合と約束する. つまり, 集合 A に対して次が成立する.

$$\phi \subseteq A.$$

※2　集合 A, B に対して次の同値が成り立つ.

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A.$$

例えば,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

例題 1-2
集合 A, B を次で定める.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ を } 3 \text{ で割った余りは } 1\ \}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \text{を } 3 \text{ で割った余りは } 1\ \}. \end{aligned}$$

(1) $A \subseteq B$ を示せ.

(2) $B \not\subseteq A$ を示せ.

(証明の方針)
(1) $x \in A$ ならば $x \in B$ を示せばよい.
(2) B の元で A には含まれないものを見つければよい.

(証明)
(1) $x \in A$ とする. このとき, $x = 3n + 1$ (n: 整数) と表せる. よって

$$x^2 = (3n + 1)^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1$$

よって x^2 を 3 で割った余りは 1. よって $x \in B$. 従って $A \subseteq B$ である.

(2) $x = 2$ を考える. x^2 を 3 で割った余りは 1 より, $x \in B$. 一方, $x \notin A$ である. よって $B \not\subseteq A$.
□

問題 1-3 集合 A, B を次で定める.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 < 2\}. \end{aligned}$$

(1) $A \subseteq B$ を示せ.

(2) $B \not\subseteq A$ を示せ.

問題 1-4 集合 $A = \{a, b\}$ の部分集合をすべて求めよ.

定義 1-7 (区間)
実数 a, b $(a < b)$ に対して次の集合を考える.

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

$[a, b]$, (a, b) の形の $\mathbb{R}$ の部分集合をそれぞれ**閉区間**, **開区間**という. $(a, b]$ または $[a, b)$ の形の $\mathbb{R}$ の部分集合を**半開区間**という. また実数 a に対して,

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{aligned}$$

と定義する.

問題 1-5 集合 A, B を次で定める.

$$A = \{x \in (1, 10) \mid x \notin (5, 20)\}, \quad B = \{x \in (1, 10) \mid x^2 > 3\}.$$

A, B を 定義 1-7 の記号を用いて表せ.