

## 集合論 (第4回) の解答

### 問題 4-1

(1)  $f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 5.$

(2)  $x \in \mathbb{R}$  に対して,

$$x \in A \iff f(x) = x \iff x^2 = x \iff x = 0, 1.$$

よって  $A = \{0, 1\}.$

### 問題 4-2

$f, g, h$  の像を計算すると,

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1,$$

$$g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2,$$

$$h(0) = 0, h(1) = 1, h(2) = 1.$$

(1) すべての  $x \in A$  に対して  $f(x) = h(x)$  なので  $f = h$ . また  $f(2) \neq g(2)$  より  $f \neq g$  である.

(2) すべての  $x \in A$  に対して  $g(x) = x$  なので  $g = \text{Id}_A$  である.

### 問題 4-3

$f$  の像を計算すると,

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 2, f(4) = 2, f(5) = 4, f(6) = 1.$$

(1)  $f(X) = \{0, 1, 2, 4\}.$

(2)  $f^{-1}(B_1) = \{1, 6\}, f^{-1}(B_2) = \phi.$

### 問題 4-4

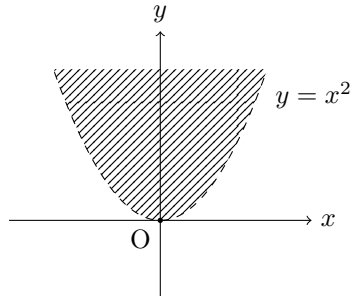
(1) について.

$$f(A) = \{f(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{0\}.$$

(2) について.

$$f^{-1}(I) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \in (0, \infty)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}.$$

$f^{-1}(I)$  を図示すると,



□

**問題 4-5**

(1)  $y \in f(A_1 \cap A_2)$  とすると,  $f(x) = y$  ( $x \in A_1 \cap A_2$ ) と表せる.  $x \in A_1$  より  $y \in f(A_1)$  であり,  $x \in A_2$  より  $y \in f(A_2)$ . 従って  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ . 以上より  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ .

(2) 例えば, 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $x \mapsto x^2$ ) と  $A_1 = \{-1, 0\}$  と  $A_2 = \{0, 1\}$  を考える. このとき,

$$\begin{aligned} f(A_1 \cap A_2) &= f(\{0\}) = \{0\}, \\ f(A_1) \cap f(A_2) &= \{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}. \end{aligned}$$

従って  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ .

(3)  $y \in f(f^{-1}(B))$  とすると,  $y = f(x)$  ( $x \in f^{-1}(B)$ ) と表せる.  $x \in f^{-1}(B)$  より  $y = f(x) \in B$ . 従って  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ .