集合論 (第4回)

4. 写像

写像とは二つの集合に対して, 一方の集合の要素にもう一方の集合の要素を一つずつ対応させる規則のことである. 例えば, 1 次関数, 2 次関数, 三角関数などは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である. 今回は写像の定義と例, また像と逆像の概念について解説する. 詳細は下記の文献を参考のこと.

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.16–p.19.
- 「集合 · 位相入門」(松坂和夫 著) の p.30–p.32.

定義 4-1 (写像)
集合 A, B を考える. A の元に B の元を一つずつ対応させる規則 f のことを A **から** B **への写像**といい, $f : A \to B$ で表す. 写像 f により $a \in A$ に対応する B の元を $f(a)$ で表し, a **の** f **による像**という. 元の対応を具体的に記述する場合は

$$f : A \to B \ (x \to f(x))$$

のように表す.

$A = \{-1, 0, 1\}$ と $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して, A の元 x に B の元として x^2 を対応させる写像 f を考える. このとき,

$$f : A \to B \ (x \mapsto x^2)$$

と表せる. A の元のそれぞれの像は次のようになる.

$$f(-1) = 1, \ \ f(0) = 0, \ \ f(1) = 1.$$

次に集合 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ に対して, 写像 f を

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \ ((x, y) \mapsto (x + y, x - y))$$

で定義する. このとき, f の像は

$$f((1, 2)) = (1 + 2, 1 - 2) = (3, -1), \quad f((1, 0)) = (1 + 0, 1 - 0) = (1, 1)$$

などと計算できる.

[注意] $f((a, b))$ は $f(a, b)$ と書く場合もある.

問題 4-1

(1) $A = \{0, 1, 2\}$ から $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ への写像を $f : A \to B$ $(x \mapsto 2x + 1)$ で定義する．A の元の f による像をそれぞれ求めよ．

(2) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto x^2)$ に対して, 次の集合の要素をすべて求めよ．

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}.$$

定義 4-2

(1) $f : A \to B$ と $g : A \to B$ を考える．すべての $x \in A$ に対して $f(x) = g(x)$ のとき, f **と** g **は等しい**といい, $f = g$ で表す．そうでないとき, $f \neq g$ で表す．

(2) $f : A \to A$ を考える．すべての $x \in A$ に対して $f(x) = x$ のとき, f は A **の恒等写像**といい, $f = \mathrm{Id}_A$ で表す．

$A = \{-1, 0, 1\}$ と $f : A \to A$ $(x \mapsto x^3)$ を考える．このとき,

$$f(-1) = (-1)^3 = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

従って $f = \mathrm{Id}_A$．また $g : A \to A$ $(x \mapsto x^2)$ とすると, $f(-1) \neq g(-1)$ より $f \neq g$ である．

問題 4-2 $A = \{0, 1, 2\}$ とし, A から A への写像を

$$f : A \to A\ (x \mapsto R(x^2)), \quad g : A \to A\ (x \mapsto R(x^3)), \quad h : A \to A\ (x \mapsto R(x^4))$$

で定義する．ただし, $R(x)$ は整数 x を 3 で割った余りとする．

(1) $f = h$ および $f \neq g$ を示せ．

(2) $g = \mathrm{Id}_A$ を示せ．

定義 4-3 (像と逆像)

写像 $f : X \to Y$ を考える．X の部分集合 A に対して, Y の部分集合

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

を A **の** f **による像**という．また Y の部分集合 B に対して, X の部分集合

$$f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

を B **の** f **による逆像**という．

$X = \{-2,-1,0,1,2\}$ と $Y = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ に対して, 写像 $f : X \to Y\ (x \mapsto x^2 - 1)$ を考える. X の部分集合 $A = \{-1,0,1\}$ の f による像は

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(-1),\ f(0),\ f(1)\} = \{0,-1,0\} = \{-1,0\}.$$

また Y の部分集合 $B = \{2,3\}$ の f による逆像は

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{-2,2\}.$$

例題 4-1

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ((x,y) \mapsto x^2 + y^2)$ を考える. また $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と $\mathbb{R}$ の開区間 $I = (2,3)$ を考える.

(1) $f(A)$ を求めよ.

(2) $f^{-1}(I)$ を図示せよ.

(解答)

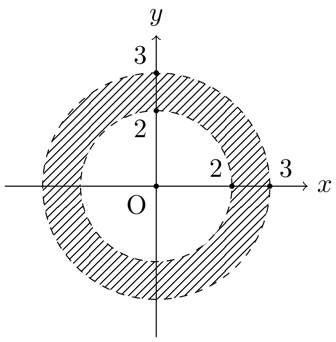
(1) について.

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x,y) \mid (x,y) \in A\} \\ &= \{f(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{2t^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= [0,\infty). \end{aligned}$$

(2) 逆像の定義より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(I) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in I\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in I\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x^2 + y^2 < 3\}. \end{aligned}$$

従って $f^{-1}(I)$ は下記の通り.



□

問題 4-3　$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と $f : X \to X$ $(x \mapsto R(x^2))$ を考える．ただし，$R(x)$ は x を 7 で割った余りとする．

(1) $f(X)$ を求めよ．

(2) $B_1 = \{1\}$ と $B_2 = \{3, 5\}$ に対して，$f^{-1}(B_1)$ および $f^{-1}(B_2)$ を求めよ．

問題 4-4　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $((x, y) \mapsto y - x^2)$ を考える．また $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と $\mathbb{R}$ の開区間 $I = (0, \infty)$ を考える．

(1) $f(A)$ を求めよ．

(2) $f^{-1}(I)$ を図示せよ．

例題 4-2

写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A_1, A_2 および Y の部分集合 B_1, B_2 を考える．

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ を示せ．

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ を示せ．

(解答)

(1) $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ より $f(A_1) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$．また $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ より $f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$．従って $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$．

次に逆の包含を示す．$y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする．このとき，$y = x$ $(x \in A_1 \cup A_2)$ と表せる．$x \in A_1$ のとき，$y = f(x) \in f(A_1) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$．$x \in A_2$ のとき，$y = f(x) \in f(A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$．よって $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$．

(2) $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ より $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1)$．また $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$ より $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_2)$．従って $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$．

次に逆の包含を示す．$x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ とする．$x \in f^{-1}(B_1)$ より $f(x) \in B_1$ であり，$x \in f^{-1}(B_2)$ より $f(x) \in B_2$．よって $f(x) \in B_1 \cap B_2$．従って $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$．よって $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)$．

□

問題 4-5　写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A_1, A_2 および Y の部分集合 B を考える．

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ を示せ．

(2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ が成立しない例を考えよ．

(2) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ を示せ．