集合論 (第 7 回) の解答

問題 7-1

(1) について.

(i) 反射律. $x \in \mathbb{R}$ とする. $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ より $x \sim x$.

(iii) 対称律. $x, y \in \mathbb{R}$ とし, $x \sim y$ と仮定する. このとき, $x - y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ と表せる. $y - x = -k \in \mathbb{Z}$ より $y \sim x$.

(iii) 推移律. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ とし, $x \sim y$, $y \sim z$ と仮定する. このとき, $x - y = k$, $y - z = l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ と表せる. $x - z = k + l \in \mathbb{Z}$ より $x \sim z$.

(2) について.

(i) 反射律. $x \in X$ とする. $f(x) = f(x)$ より $x \sim x$.

(iii) 対称律. $x, y \in X$ とし, $x \sim y$ と仮定する. このとき, $f(x) = f(y)$. よって, $f(y) = f(x)$ より $y \sim x$.

(iii) 推移律. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ とし, $x \sim y$, $y \sim z$ と仮定する. このとき, $f(x) = f(y)$, $f(y) = f(z)$. よって $f(x) = f(z)$ より $x \sim z$.

問題 7-2

(1) について.

$$
\begin{aligned}
C((0,0)) &= \{(a,b) \in X \mid (a,b) \sim (0,0)\} \\
&= \{(a,b) \in X \mid ab = 0\} \\
&= \{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (2,0)\}. \\
C((2,1)) &= \{(a,b) \in X \mid (a,b) \sim (2,1)\} \\
&= \{(a,b) \in X \mid ab = 2\} \\
&= \{(2,1),\ (1,2)\}.
\end{aligned}
$$

(2) について.

$$
\begin{aligned}
C((r,0)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \sim (r,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}.
\end{aligned}
$$

従って, $C((r,0))$ は原点を中心とする半径 r の円である.

問題 7-3

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とする．$b = y - x$ と置くと，$(x, y) \sim (0, b)$．よって $C((x, y)) = C((0, b))$．よって各同値類は $C((0, b))$ $(b \in \mathbb{R})$ のいずれかと一致する．また

$$\begin{aligned} C((0,b)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \sim (0,b)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + b\}. \end{aligned}$$

よって，この同値関係は $\mathbb{R}^2$ を傾き 1 の直線で分割する．