集合論 (第7回)

7. 同値関係と同値類

今回は集合の同値関係について紹介する. 同値関係が与えられると、集合は同値類と呼ばれるグループに分割できる. このような集合のグループ分けは様々な数学で重要になる.

参考文献

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.32–p.34.
- 「集合 · 位相入門」(松坂和夫 著) の p.52–p.56.

定義 7-1 (2 項関係)
集合 A を考える. 直積集合 $A \times A$ の各元 (a, b) に対して, 満たすか満たさないかが判定できる規則 R を A 上の 2 **項関係**という. 元 (a, b) が R を満たすとき, $a \, R \, b$ で表し, そうでないとき, $a \not R \, b$ で表す.

2 項関係の例を挙げる.

(1) $\mathbb{R}$ 上の 2 項関係 R を

$$a \, R \, b \iff a \geq b \quad \text{(eq1)}$$

で定義する. $2 \geq 1$ より $2 \, R \, 1$ であり, 一方, $1 \geq 2$ は成立しないので $1 \not R \, 2$.

(2) $\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 R を

$$a \, R \, b \iff a - b \text{ が } 5 \text{ の倍数}$$

で定義する. $1 - 6$ は 5 の倍数より $1 \, R \, 6$ であり, $3 - 2$ は 5 の倍数ではないので $3 \not R \, 2$.

定義 7-2 (同値関係)
集合 A 上の 2 項関係 $\sim$ が次の 3 条件を満たすとき, **同値関係**という.

(i) $a \sim a$ (反射律).

(ii) $a \sim b$ ならば $b \sim a$ (対称律).

(iii) $a \sim b, b \sim c$ ならば $a \sim c$ (推移律).

$\mathbb{R}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff a = b$$

で定義すると, 明らかに定義 7-2 の (i)-(iii) を満たすので, $\sim$ は同値関係である. 一方, (eq1) の $\mathbb{R}$ 上の 2 項関係 R を考えると, $2\ R\ 1$ だが, $1 \not R\ 2$ である. よって, R は対称律が成立しないので, 同値関係ではない.

例題 7-1

自然数 n をとる. $\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff a - b \text{ が } n \text{ の倍数}$$

で定義するとき, $\sim$ が同値関係であることを示せ.

※ $a \sim b$ は「a と b を n で割った余りが等しい」とも言い換えられる.

(証明)

(i) 反射律. $x \in \mathbb{Z}$ とする. $x - x = 0$ は n の倍数より $x \sim x$.

(iii) 対称律. $x, y \in \mathbb{Z}$ とし, $x \sim y$ と仮定する. このとき, $x - y = nk$ $(k \in \mathbb{Z})$ と表せる. $y - x = n(-k)$ より $y \sim x$.

(iii) 推移律. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ とし, $x \sim y$, $y \sim z$ と仮定する. このとき, $x - y = nk$, $y - z = nl$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ と表せる. $x - z = n(k + l)$ より $x \sim z$.

$\square$

問題 7-1

(1) $\mathbb{R}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$$

で定義するとき, $\sim$ が同値関係であることを示せ.

(2) 写像 $f : X \to Y$ に対して, X 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

で定義するとき, $\sim$ が同値関係であることを示せ.

定義 7-3 (同値類)

集合 X 上の同値関係 $\sim$ を考える. $a \in X$ に対して,

$$C(a) = \{x \in X \mid a \sim x\}$$

を a の**同値類**という.

集合 $X=\{-1,0,1\}$ と写像 $f:X\to\mathbb{R}\ (x\to x^2)$ を考える. X 上の同値関係 $\sim$ を

$$a\sim b \iff f(a)=f(b)$$

で定義する. このとき, 各元の同値類はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned}
C(-1) &= \{x\in X \mid -1\sim x\}=\{x\in X\mid f(-1)=f(x)\}=\{-1,1\},\\
C(0) &= \{x\in X \mid 0\sim x\}=\{x\in X\mid f(0)=f(x)\}=\{0\},\\
C(1) &= \{x\in X \mid 1\sim x\}=\{x\in X\mid f(1)=f(x)\}=\{-1,1\}.
\end{aligned}$$

問題 7-2

(1) 集合 $X=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\mid 0\le a\le 2,\ 0\le b\le 2\}$ に対して, 同値関係 $\sim$ を

$$(a,b)\sim(c,d) \iff ab=cd$$

で定める. このとき, $C((0,0))$ と $C((2,1))$ をそれぞれ計算せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の同値関係 $\sim$ を

$$(a,b)\sim(c,d) \iff a^2+b^2=c^2+d^2$$

で定める. 実数 $r>0$ に対して, $C((r,0))$ はどのような集合か?

定理 7-1

集合 X 上の同値関係 $\sim$ を考える. $a,b\in X$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $a\in C(a)$.

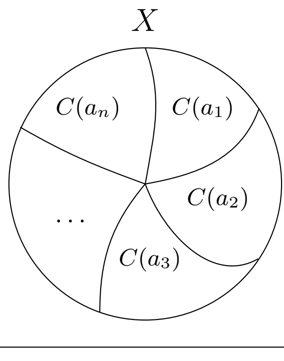
(2) $a\sim b \iff C(a)=C(b)$.

(3) $C(a)\ne C(b) \iff C(a)\cap C(b)=\phi$.

※ $C(a_1),C(a_2),...,C(a_n)$ が相異なる同値類全体とすると, 上の (1), (3) より

$$X=C(a_1)\cup C(a_2)\cup\cdots\cup C(a_n),\quad C(a_i)\cap C(a_j)=\phi\ (i\ne j)$$

となる. つまり, 同値関係 $\sim$ は集合 X の分割を与える.



(証明)
(1) $a \sim a$ より $a \in C(a)$.

(2) $\Rightarrow$ を示す. $x \in C(a)$ とすると, $a \sim x$ となる. また $a \sim b$ より $b \sim a$ であるから, $b \sim x$. 従って $x \in C(b)$. これより $C(a) \subseteq C(b)$. 逆の包含も同様である. 次に $\Leftarrow$ を示す. (1) より $b \in C(b) = C(a)$. 従って $a \sim b$.

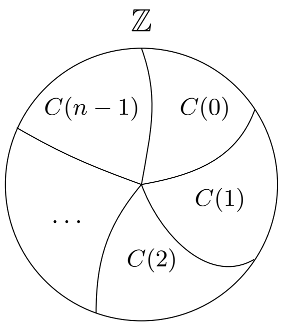
(3) $\Leftarrow$ を示す. $a \in C(a)$ であり, また $C(a) \cap C(b) = \phi$ より $a \notin C(b)$. よって $C(a) \neq C(b)$. 次に $\Rightarrow$ を示す. $C(a) \cap C(b) \neq \phi$ と仮定する. $x \in C(a) \cap C(b)$ を取ると, $a \sim x$ かつ $b \sim x$. これより $a \sim b$ となる. (2) より $C(a) = C(b)$ となり矛盾. 従って $C(a) \cap C(b) = \phi$.

$\square$

例題 7-1 の同値関係を考える. $x \in \mathbb{Z}$ に対して, x を n で割った余りを r とする. このとき, $x \sim r$ より, $C(x) = C(r)$. つまり, $\sim$ の各同値類は $C(0)$, $C(1)$, ..., $C(n-1)$ のいずれかと一致する. また整数 r $(0 \leq r \leq n-1)$ に対して,

$$C(r) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim r\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ を } n \text{ で割った余りは } r\}.$$

よって, この同値関係は $\mathbb{Z}$ を n で割った余りで分割している.



問題 7-3 $\mathbb{R}^2$ の同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff y_1 - x_1 = y_2 - x_2$$

で定義する. このとき, $\mathbb{R}^2$ に対して $\sim$ はどのような分割を与えるか?