集合論 (第 8 回) の解答

問題 8-1

商集合 $X/\sim$ の要素は次の 4 つ.

$$\begin{aligned} C((0,0)) &= \{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\}, \\ C((1,1)) &= \{(1,1)\}, \\ C((2,1)) &= \{(2,1),(1,2)\}, \\ C((2,2)) &= \{(2,2)\}. \end{aligned}$$

よって $|X/\sim| = 4$.

問題 8-2

(i) $C \in \mathbb{R}^2/\sim$ とすると, $C = C((x,y))$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ と表せる. $a = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと, $a^2+0^2 = x^2+y^2$ より $(a,0) \sim (x,y)$. よって

$$C = C((x,y)) = C((a,0)) \in \{C(P) \mid P \in S\}.$$

従って $\mathbb{R}/\sim \subseteq \{C(P) \mid P \in S\}$. 逆の包含は明らかなので, $\mathbb{R}/\sim = \{C(P) \mid P \in S\}$.

(ii) $(a,0),(b,0) \in S$ $(a,b \geq 0)$ とし, $C((a,0)) = C((b,0))$ を仮定する. このとき, $a^2+0^2 = b^2+0^2$ かつ $a,b \geq 0$ より $a = b$. 従って $(a,0) = (b,0)$. よって定義 8-2 の条件 (ii) の対偶が示せた.

以上 (i), (ii) より S は $\mathbb{R}^2/\sim$ の完全代表系である.

問題 8-3

$C(x), C(y) \in \mathbb{Z}/\sim$ とし, $C(x) = C(y)$ と仮定する. このとき, $x - y = nk$ $(k \in \mathbb{Z})$ と表せるので,

$$x^2 - y^2 = (y+nk)^2 - y^2 = n(2ky + nk^2).$$

従って $C(x^2) = C(y^2)$. よって F は well-defied.

問題 8-4

(1) 定義 7-2 の条件を確認する.

(i) 反射律. $(x,y) \in X$ とする. $xy = yx$ より $(x,y) \sim (x,y)$.

(iii) 対称律. $(x,y),(s,t) \in X$ とし, $(x,y) \sim (s,t)$ と仮定する. このとき, $xt = ys$ より $sy = tx$. よって $(s,t) \sim (x,y)$.

(iii) 推移律. $(x,y),(s,t),(u,v) \in X$ とし, $(x,y) \sim (s,t)$, $(s,t) \sim (u,v)$ と仮定する. このとき, $xt = ys$, $sv = tu$. よって

$$xvt = ysv = ytu.$$

$t \neq 0$ より $xv = yu$. 従って $(x,y) \sim (u,v)$.

(2) $\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{s_1}{t_1}\right), \left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{s_2}{t_2}\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ とし, $\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{s_1}{t_1}\right) = \left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{s_2}{t_2}\right)$ と仮定する. このとき, $x_1y_2 = y_1x_2$, $s_1t_2 = t_1s_2$. 従って

$$(x_1s_1)(y_2t_2) = (y_1t_1)(x_2s_2).$$

よって $\frac{x_1s_1}{y_1t_1} = \frac{x_2s_2}{y_2t_2}$. 従って $\cdot$ は well-defined.