集合論 (第8回)

8. 商集合

集合とその同値関係に対して, 同値類全体からなる集合を商集合という. 様々な分野において, 重要な数学的対象が商集合を用いて構成されることは多い. 今回は商集合や完全代表系について解説する. また最後に商集合を用いて, 整数の集合から有理数の集合を構成する方法を紹介する.

参考文献

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.34.
- 「集合・位相入門」(松坂和夫 著) の p.55–p.59.

定義 8-1 (商集合)
集合 X の同値関係 $\sim$ に対して, 同値類全体を

$$X/\sim = \{C(a) \mid a \in X\}$$

で表し, X の $\sim$ による**商集合**と呼ぶ. また商集合の元 $C \in X/\sim$ に対して, $C(a) = C$ を満たす $a \in X$ を C の**代表**という.

集合 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ とし, X の同値関係を

$$x \sim y \iff |x| = |y|$$

で定義する. このとき,「$x \sim y \iff x = \pm y$」なので, 各同値類は

$$C(-2) = C(2) = \{-2, 2\}, \quad C(-1) = C(1) = \{-1, 1\}, \quad C(0) = \{0\}.$$

よって

$$X/\sim = \{C(-2), C(-1), C(0)\} = \{\{-2, 2\}, \{-1, 1\}, \{0\}\} \qquad \text{(eq1)}$$

となる.

問題 8-1 集合 $X = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le a \le 2,\ 0 \le b \le 2\}$ に対して, 同値関係 $\sim$ を

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ab = cd$$

で定める. 商集合 $X/\sim$ の要素の個数を求めよ.

定義 8-2 (完全代表系)
集合 X 上の同値関係 $\sim$ を考える. X の部分集合 S が次の (i), (ii) を満たすとき, S を $X/\sim$ の**完全代表系**という.

(i) $\{C(x) \mid x \in S\} = X/\sim$.

(ii) $x, y \in S$ とする. $x \neq y$ ならば $C(x) \neq C(y)$.

※ S は X の各同値類から一つずつ代表を取ってできる X の部分集合である.

(eq1) の $X/\sim$ を考えると, $\{-2, -1, 0\}$ や $\{0, 1, 2\}$ が完全代表系となる.

例題 8-1
集合 $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

で定める. このとき, 閉開区間 $I = [0, 1)$ は $\mathbb{R}/\sim$ の完全代表系であることを示せ.

(解答)
定義 8-2 の (i), (ii) の条件を満たすことを確認すればよい.

(i) $C \in \mathbb{R}/\sim$ とすると, $C = C(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ と表せる. ここで, x の整数部分を n とし, 小数部分を r とすると, $x = n + r$ である. $x - r = n \in \mathbb{Z}$ より $x \sim r$. よって

$$C = C(x) = C(r) \in \{C(t) \mid t \in I\}.$$

これで $\mathbb{R}/\sim \subseteq \{C(t) \mid t \in I\}$ が示せた. 逆の包含は明らかより $\mathbb{R}/\sim = \{C(t) \mid t \in I\}$.

(ii) 定義 8-2 (ii) を示すために, 対偶をとって

$$x, y \in I \quad (C(x) = C(y)) \Rightarrow x = y$$

を示す. $0 \leq x, y < 1$ より $|x - y| < 1$ が成り立つ. 一方, $C(x) = C(y)$ より $x - y \in \mathbb{Z}$ である. 従って $x - y = 0$ でなければならない. よって $x = y$.

□

問題 8-2 $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (s, t) \iff x^2 + y^2 = s^2 + t^2$$

で定める. このとき, $S = \{(a, 0) \mid a \geq 0\}$ が $\mathbb{R}^2/\sim$ の完全代表系であることを示せ.

定義 8-3 (well-defined)
集合 X の同値関係 $\sim$ を考える. 写像 $f : X \to Y$ が条件

$$C(x) = C(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \qquad \text{(eq2)}$$

を満たすとする. このとき,

$$F : X/\sim \to Y \ \ (C(x) \mapsto f(x)) \quad \text{(eq3)}$$

により, $X/\sim$ から Y への写像が定義できる.

※ (eq3) の形で F が与えられたとき, (eq2) の条件を満たすかどうか調べる必要がある. これは, F の行き先が同値類の代表の取り方に依らないことを確認するためである. このように与えられた写像が同値類の代表の取り方に依らずに定義できるとき, **well-defined** であるという.

$\mathbb{Z}$ の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff x - y \text{ が } 3 \text{ の倍数}$$

で定義し, さらに

$$F : \mathbb{Z}/\sim \to \mathbb{Z} \ (C(x) \mapsto x)$$

とする. このとき, $C(1) = C(4)$ であるが, $F((C(1)) = 1 \neq 4 = F(C(4))$ なので, F は well-defined ではない.

例題 8-2
$\mathbb{R}/\sim$ は例題 8-1 で定義したものとする. このとき,

$$F : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}^2 \ (\theta \mapsto (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)))$$

で定める. F は well-defined であることを示せ.

(解答)
$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\ (C(\theta_1) = C(\theta_2))$ とする. このとき, $\theta_1 - \theta_2 = n\ (n \in \mathbb{Z})$ と表せる. よって

$$\begin{aligned} F(C(\theta_1)) &= (\cos(2\pi\theta_1), \sin(2\pi\theta_1)) \\ &= (\cos(2\pi\theta_2 + 2n\pi), \sin(2\pi\theta_2 + 2n\pi)) \\ &= (\cos(2\pi\theta_2), \sin(2\pi\theta_2)) \\ &= F(C(\theta_2)). \end{aligned}$$

よって F は well-defined である.

□

問題 8-3 自然数 n に対して, $\mathbb{Z}$ の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff x - y \text{ が } n \text{ の倍数}$$

で定義し, さらに

$$F : \mathbb{Z}/\sim \to \mathbb{Z}/\sim \ (C(x) \mapsto C(x^2))$$

とする. F は well-defined であることを示せ.

最後に, 整数の集合 $\mathbb{Z}$ から有理数の集合 $\mathbb{Q}$ を構成する方法を紹介する. まず, 集合

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \neq 0\}$$

に次で同値関係を入れる.

$$(x, y) \sim (s, t) \iff xt = ys. \qquad \text{(eq4)}$$

このとき, 商集合 $X/\sim$ を $\mathbb{Q}$ で表し, 同値類 $C((x, y))$ を $\frac{x}{y}$ で表す. 例えば, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ は次のように示せる.

$$2 \times 6 = 3 \times 4 \Rightarrow (2, 3) \sim (4, 6) \Rightarrow C((2, 3)) = C((4, 6)) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

次に $\mathbb{Q}$ に足し算と掛け算を定義する.

命題 8-1

$\mathbb{Q} = X/\sim$ に次で演算を入れる.

$$+ \quad : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \ \left(\left(\frac{x}{y}, \frac{s}{t}\right) \mapsto \frac{xt + ys}{yt}\right),$$

$$\cdot \quad : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \ \left(\left(\frac{x}{y}, \frac{s}{t}\right) \mapsto \frac{xs}{yt}\right).$$

このとき, $+$ と $\cdot$ は well-defined である.

(証明)

$+$ のみ証明する. $\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{s_1}{t_1}\right), \left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{s_2}{t_2}\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ とし, $\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{s_1}{t_1}\right) = \left(\frac{x_2}{y_2}, \frac{s_2}{t_2}\right)$ と仮定する. $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ より $x_1 y_2 = y_1 x_2$ であり, $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$ より $s_1 t_2 = t_1 s_2$. 従って

$$(x_1 t_1 + y_1 s_1) y_2 t_2 = (x_2 t_2 + y_2 s_2) y_1 t_1.$$

よって $\frac{x_1 t_1 + y_1 s_1}{y_1 t_1} = \frac{x_2 t_2 + y_2 s_2}{y_2 t_2}$. 従って $+$ は well-defined である.

□

問題 8-4

(1) (eq4) の同値関係を示せ.

(2) 命題 8-1 の $\cdot$ が well-defined であることを示せ.