環論 (第5回)

5. イデアル (1)

イデアルは環構造を調べる上で重要な概念である. 今回はイデアルの基本事項と具体例について解説する.

定義 5-1
可換環 A を考える. 空でない A の部分集合 I が次の (1), (2) を満たすとき, I を A の**イデアル**という.

(1) $x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$.

(2) $a \in A,\ x \in I \Rightarrow ax \in I$.

[**補足**] 定義 5-1 (1) より, イデアル I は $+$ に関して A の部分群となるので次が成り立つ.

$$\text{(i)}\ \ x, y \in I \Rightarrow x + y \in I, \qquad \text{(ii)}\ \ 0_A \in I, \qquad \text{(iii)}\ x \in I \Rightarrow -x \in I.$$

問題 5-1 可換環 A のイデアル I に対して次を示せ.

$$1_A \in I \Rightarrow I = A.$$

例題 5-1
整数 n の倍数全体

$$n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

は $\mathbb{Z}$ のイデアルであることを示せ.

[**証明**] $n\mathbb{Z}$ がイデアルの条件を満たすことを確認する.

(1) $x, y \in n\mathbb{Z}$ とする. このとき, $x = ns,\ y = nt\ (s, t \in \mathbb{Z})$ と表せる. よって,

$$x - y = n(s - t) \in n\mathbb{Z}.$$

(2) $a \in \mathbb{Z},\ x \in n\mathbb{Z}$ とする. このとき, $x = ns\ (s \in \mathbb{Z})$ と表せる. よって

$$ax = n(sa) \in n\mathbb{Z}.$$

以上より $n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルである.

□

問題 5-2 可換環 A のイデアル I, J に対して, $I \cap J$ もイデアルであることを示せ.

問題 5-3 $A = \mathbb{C}[x],\ a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$I = \{f(x) \in A \mid f(a) = 0\}$$

と置く. I が A のイデアルであることを示せ.

例題 5-1 の一般化として次が成り立つ.

定理 5-1

可換環 A と $a_1,\ a_2, ..., a_k \in A$ に対して, A の部分集合を

$$I = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \mid x_1, x_2, ..., x_k \in A\} \qquad \text{(eq1)}$$

で定める. このとき, I は $a_1,\ a_2, ..., a_k$ を含む最小の A のイデアルになる.

※ I を $a_1,\ a_2, ..., a_k$ **で生成されたイデアル**といい,

$$a_1A + a_2A + \cdots + a_kA \quad \text{または} \quad (a_1, a_2, ..., a_k)$$

で表す. 特に $aA = (a)$ $(a \in A)$ の形のイデアルを**単項イデアル**という.

[証明]

($a_1,\ a_2, ..., a_k$ を含むこと)

$1 \leq i \leq k$ に対して,

$$a_i = a_1 \cdot 0_A + \cdots + a_i \cdot 1_A + \cdots + a_k \cdot 0_A \in I.$$

(イデアルであること)

(1) $x, y \in I$ とすると,

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i, \quad y = \sum_{i=1}^{k} a_iy_i \quad (x_1, ..., x_k,\ y_1, ..., y_k \in A)$$

と表せる. $1 \leq i \leq k$ に対して $x_i - y_i \in A$. よって

$$x - y = \sum_{i=1}^{k} a_i(x_i - y_i) \in I.$$

(2) $a \in A, \quad x \in I$ とする. このとき,

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i, \quad (x_1, ..., x_k \in A)$$

と表せる. $1 \leq i \leq k$ に対して $ax_i \in A$. 従って

$$ax = \sum_{i=1}^{k} a_i(ax_i) \in I.$$

以上 (1), (2) より I は A のイデアルである.

(最小性)

$a_1,\ a_2, ..., a_k$ を含むイデアル J を考える. $x \in I$ をとり,

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \quad (x_1, ..., x_k \in A)$$

と表す. $1 \leq i \leq k$ に対して, $a_i \in J$ より $a_i x_i \in J$. よって,

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in J.$$

以上より $I \subseteq J$ が示せた. これで I の最小性が証明できた.

□

[補足]

(1) 定理 5-1 の最小性の部分から, A のイデアル J に対して,

$$a_1, a_2, ..., a_k \in J \Rightarrow (a_1, a_2, ..., a_k) \subseteq J$$

が成り立つ.

(2) 多くの可換環でイデアルは (eq1) の形で表せる. 例えば,

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n], \quad \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{定理 3-2 の環})$$

のイデアルはすべて (eq1) の形で表せることが知られている. このような性質を持つ可換環を**ネーター環**と言う. ネーター環の詳細は「環と体とガロア理論」(雪江明彦 著) を参考のこと.

定理 5-2

$\mathbb{Z}$ のイデアル I に対して, $I = n\mathbb{Z}$ $(n \geq 0)$ を満たす整数 n が存在する.

[証明]

$I = \{0\}$ のときは $n = 0$ とすればよい. $\{0\} \subsetneq I$ の場合を考える. I に含まれる最小の自然数を n とするとき, $I = n\mathbb{Z}$ を示す. $n \in I$ より $n\mathbb{Z} \subseteq I$. 逆に $x \in I$ とすると,

$$x = qn + r, \quad 0 \leq r < n$$

を満たす整数 q, r がある. $x, n \in I$ より $r = x - qn \in I$. よって n の最小性から $r = 0$ となり, $x = nq \in n\mathbb{Z}$. 従って $I \subseteq n\mathbb{Z}$.

□

例題 5-2
次が成り立つことを示せ.

$$(1)\ 4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}, \qquad (2)\ 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}, \qquad (3)\ 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}.$$

[証明]
(1) $4 \in 2\mathbb{Z}$ より $4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$.

(2) $4, 6 \in 2\mathbb{Z}$ より $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$. 逆に,

$$2 = 4 \times 2 + 6 \times (-1) \in 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}.$$

従って $2\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$. よって $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

□

(3) $12 \in 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$ より,

$$12\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}.$$

逆に $x \in 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$ とする. x は 4 の倍数かつ 6 の倍数なので 12 の倍数. よって $x \in 12\mathbb{Z}$. 従って

$$4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}.$$

以上より $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$.

□

[補足] 整数環 $\mathbb{Z}$ のイデアルに関しては, 大学数学の授業ノートの初等整数論 (第 2 回) も参考のこと.

問題 5-4 $A = \mathbb{C}[x]$ において次を示せ.

$$(x^2 - 1)A + (x^3 + 1)A = (x + 1)A.$$