# 環論 (第 4 回)

**問題 4-1**

$f(x),\ g(x) \in A[x]\ (f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0)$ とする. $\deg f(x) \geq 0,\ \ \deg g(x) \geq 0$ なので

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0.$$

従って $f(x)g(x) \neq 0$. よって $A[x]$ は整域.

**問題 4-2**

$\mathbb{R}[x]$ で $f(x)$ を $x^2-1$ で割ると,

$$f(x) = (x^2-1)q(x) + ax + b \ \ (q(x) \in \mathbb{R}[x],\ \ a, b \in \mathbb{R})$$

と表せる. このとき,

$$1 = f(1) = a + b, \qquad 1 = f(-1) = -a + b.$$

これを解いて $a = 0,\ b = 1$. よって余りは 1.

**問題 4-3**

まず,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= q_1(x)f(x) + r_1(x), \quad \deg r_1(x) < \deg f(x) \quad (q_1(x), r_1(x) \in A[x]), \\ g_2(x) &= q_2(x)f(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < \deg f(x) \quad (q_2(x), r_2(x) \in A[x]) \end{aligned}$$

とおく.

$\Rightarrow$ を示す. $r_1(x) = r_2(x)$ のとき,

$$g_1(x) - g_2(x) = \{q_1(x) - q_2(x)\}f(x)$$

より $f(x) \mid (g_1(x) - g_2(x))$.

$\Leftarrow$ を示す. $f(x) \mid (g_1(x) - g_2(x))$ より,

$$g_1(x) - g_2(x) = f(x)k(x) \quad (k(x) \in A[x])$$

と表せる. このとき,

$$f(x)k(x) = \{q_1(x) - q_2(x)\}f(x) + (r_1(x) - r_2(x))$$

なので, $f(x) \mid (r_1(x) - r_2(x))$. また

$$\deg(r_1(x) - r_2(x)) < \deg f(x)$$

であるから $r_1(x) - r_2(x) = 0$. 従って $r_1(x) = r_2(x)$.

**問題 4-4**

$h(x) = f(x) - g(x)$ とする. このとき, $\deg h \leq n$ であり,

$$h(\alpha_i) = f(\alpha_i) - g(\alpha_i) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n+1).$$

定理 4-3 (2) より $h(x) = 0$. よって $f(x) = g(x)$ を得る.