環論 (第 5 回) の解答

問題 5-1

$a \in A$ とする. $1_A \in I$ より, イデアルの定義から

$$a = a \cdot 1_A \in I.$$

よって $A \subset I$. 逆の包含は明らかなので $A = I$.

問題 5-2

$I \cap J$ がイデアルの条件を満たすことを確かめる.

(1) $x, y \in I \cap J$ とする. $x, y \in I$ より $x - y \in I$. 同様に $x - y \in J$. 従って $x - y \in I \cap J$.

(2) $a \in A$, $x \in I \cap J$ とする. $x \in I$ より $ax \in I$. 同様に $ax \in J$. 従って $ax \in I \cap J$.

以上より $I \cap J$ は A のイデアルである.

問題 5-3

I がイデアルの条件を満たすことを確かめる.

(1) $f(x)$, $g(x) \in I$ とする. このとき,

$$f(a) - g(a) = 0 - 0 = 0.$$

よって $f(x) - g(x) \in I$.

(2) $g(x) \in A$, $f(x) \in I$ とする. このとき,

$$g(a)f(a) = g(a) \times 0 = 0.$$

よって $g(x)f(x) \in I$.

以上 (1), (2) より, I は A のイデアルである.

問題 5-4

まず,

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \in (x+1)A, \qquad x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \in (x+1)A.$$

従って $(x^2-1)A + (x^3+1)A \subseteq (x+1)A$. 逆に

$$(x+1) = (x^2-1) \times (-x) + (x^3+1) \times 1 \in (x^2-1)A + (x^3+1)A$$

なので, $(x+1)A \subseteq (x^2-1)A + (x^3+1)A$.