環論 (第 9 回)

9. 素イデアルと極大イデアル

素イデアルと極大イデアルについて解説する．また，これらのイデアルと剰余環との関係を考察する．

定義 9-1 (素イデアルと極大イデアル)
可換環 A のイデアル I $(I \neq A)$ を考える．

(1) 次の条件を満たすとき I を**素イデアル**という．

$$ab \in I \ (a, b \in A) \Rightarrow a \in I \text{ または } b \in I.$$

(2) I を真に含むイデアルが A だけのとき，I を**極大イデアル**という．つまり，

$$I \subsetneq J \subseteq A \Rightarrow J = A.$$

※ 条件の $I \neq A$ に注意．A 自身は素イデアルでも，極大イデアルでもない．

整数環で例を挙げる．

例題 9-1
整数環 $\mathbb{Z}$ において考える．

(1) $2\mathbb{Z}$ は素イデアルであることを示せ．

(2) $2\mathbb{Z}$ は極大イデアルであることを示せ．

(3) $4\mathbb{Z}$ は素イデアルでも，極大イデアルでもないことを示せ．

[証明]
(1) $2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ に注意する．$ab \in 2\mathbb{Z}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とする．ab は偶数より，a か b のどちらかは偶数．よって $a \in 2\mathbb{Z}$ または $b \in 2\mathbb{Z}$．従って $2\mathbb{Z}$ は素イデアル．

(2) $2\mathbb{Z} \subsetneq J \subseteq \mathbb{Z}$ となるイデアル J をとる．このとき，$1 + 2k \in J$ を満たす整数 k がある．ここで $2 \in 2\mathbb{Z} \subseteq J$ より $1 \in J$ が従う．よって $J = \mathbb{Z}$．従って $2\mathbb{Z}$ は極大イデアル．

(3) $2 \cdot 6 \in 4\mathbb{Z}$ だが，$2 \notin 4\mathbb{Z}$ かつ $6 \notin 4\mathbb{Z}$．よって $4\mathbb{Z}$ は素イデアルでない．また，

$$4\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$$

より $4\mathbb{Z}$ は極大イデアルでもない.

$\square$

問題 9-1

(1) A を整域とするとき, $\{0\}$ が A の素イデアルであることを示せ.

(2) $\mathbb{C}[x]$ において, $I=(x)$ が極大イデアルであることを示せ.

問題 9-2 環準同型 $f: A \to B$ を考える. B が整域ならば, $\ker f$ は素イデアルであることを示せ.

次に素イデアルと極大イデアルの関係を調べる.

定理 9-1
可換環 A とそのイデアル I を考える. I は極大イデアルならば素イデアルでもある.

[証明]
I は極大イデアルより $I \neq A$. 素イデアルの条件

$$ab \in I\ (a, b \in A) \Rightarrow a \in I \text{ または } b \in I \quad \text{(eq1)}$$

を示せばよい. $a \in I$ のときは示すことはない. $a \notin I$ のとき, $J=(a)+I$ とおくと $I \subsetneq J$. ここで, I は極大イデアルより $A=J$ である. $1 \in A = J = (a)+I$ より

$$1 = ax + y \ \ (\exists x \in A,\ \ \exists y \in I).$$

$ab,\ y \in I$ より,

$$b = abx + by \in I.$$

以上より (eq1) が示せた.

$\square$

[補足] 一般的に定理 9-1 の逆は成立しない. 例えば, $\{0\}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアル (問題 9-1) だが,

$$\{0\} \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$$

より $\{0\}$ は極大イデアルではない.

定理 9-2

(1) 素数 p に対して $p\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアルである. よって, 定理 9-1 より $p\mathbb{Z}$ は素イデアルでもある.

(2) $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$ が合成数ならば, $n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアルではない. よって極大イデアルでもない.

[**証明**]
(1) $p \geq 2$ より $p\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ に注意する．$p\mathbb{Z} \subsetneq J \subseteq \mathbb{Z}$ となるイデアル J を考える．$n \in J \setminus p\mathbb{Z}$ をとると, p は素数より $\gcd(n, p) = 1$．よって

$$1 = nx + py \quad (\exists x,\ \exists y \in \mathbb{Z}).$$

$n, p \in J$ より $1 \in J$．従って $J = \mathbb{Z}$．よって $p\mathbb{Z}$ は極大イデアル．

(2) n は合成数より

$$n = ab \quad (a, b \in \mathbb{Z},\ 1 < a, b < n)$$

と表せる．このとき,

$$ab \in n\mathbb{Z}, \quad a \notin n\mathbb{Z}, \quad b \notin n\mathbb{Z}.$$

従って $n\mathbb{Z}$ は素イデアルではない．

□

定理 9-3
　可換環 A とそのイデアル I を考える．

(1) I は素イデアル $\iff$ A/I は整域．

(2) I は極大イデアル $\iff$ A/I は体．

[**証明**]
(1) $\Rightarrow$ を示す．$I \neq A$ より $A/I \neq \{0 + I\}$．ここで,

$$(x + I)(y + I) = 0 + I \ \ (x + I,\ y + I \in A/I)$$

とすると, $xy \in I$．よって $x \in I$ または $y \in I$．これより $x + I = 0 + I$ または $y + I = 0 + I$．従って A/I は整域である．

　$\Leftarrow$ を示す．A/I は整域より $A/I \neq \{0 + I\}$．従って $I \neq A$ である．$xy \in I \quad (x, y \in A)$ とする．このとき,

$$(x + I)(y + I) = xy + I = 0 + I$$

であり, A/I は整域より $x + I = 0 + I$ または $y + I = 0 + I$．よって $x \in I$ または $y \in I$．よって I は素イデアル．

(2) $\Rightarrow$ を示す．$I \neq A$ より $A/I \neq \{0 + I\}$ である．$x + I \in A/I$ $(x + I \neq 0 + I)$ とすると, $x \notin I$ である．$I \subsetneq I + (x)$ であり, I は極大イデアルなので $A = I + (x)$．よって

$$1 = a + bx \quad (\exists a \in I,\ \ \exists b \in A).$$

従って

$$1 + I = (a + bx) + I = (a + I) + (b + I)(x + I) = (b + I)(x + I)$$

より, $x+I$ は A/I の可逆元. よって A/I は体.

$\Leftarrow$ を示す. A/I は体より $I \neq A$ である. $I \subsetneq J$ となるイデアル J をとる. さらに $x \in J \setminus I$ をとる. $x \notin I$ より $x+I \neq 0+I$ となる. A/I は体なので,

$$1+I = (x+I)(y+I) \quad (\exists y+I \in A/I).$$

$1+I = xy+I$ より $1-xy \in I \subseteq J$. また $x \in J$ より $1 \in J$. 従って $J=A$. よって I は極大イデアル.

$\square$

[補足] 定理 2-2 と定理 9-3 から次の流れで定理 9-1 が導ける.

$$I \text{ は極大イデアル} \Rightarrow A/I \text{ は体} \Rightarrow A/I \text{ は整域} \Rightarrow I \text{ は素イデアル}.$$

問題 9-3　可換環 $A = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とそのイデアル $I = (1+i)$ を考える.

(1) $A/I = \{0+I, 1+I\}$ を示せ.

(2) $0+I \neq 1+I$ を示せ.

(3) I は A の極大イデアルであることを示せ.