環論 (第 9 回) の解答

問題 9-1

(1) A は整域より $A \neq \{0\}$ に注意. $ab \in \{0\}$ $(a, b \in A)$ とする. $ab = 0$ で, A は整域より $a = 0$ または $b = 0$. よって $a \in \{0\}$ または $b \in \{0\}$. よって $\{0\}$ は素イデアル.

(2) $1 \notin I$ より $\mathbb{C}[x] \neq I$ である. $I \subsetneq J \subseteq \mathbb{Z}$ となるイデアル J をとる. $f(x) \in J \setminus I$ とし,

$$f(x) = xq(x) + a \quad (\ q(x) \in \mathbb{C}[x], \ \ a \in \mathbb{C})$$

と表す. $f(x)$, $x \in J$ より $a \in J$. 仮に $a = 0$ とすると, $f(x) = xq(x) \in I$ となり矛盾. 従って $a \neq 0$. よって

$$1 = a \cdot \frac{1}{a} \in J.$$

従って $J = \mathbb{C}[x]$. よって I は極大イデアル.

問題 9-2

$f(1_A) = 1_B \neq 0_B$ より $1_A \notin \ker f$. 従って $\ker f \neq A$. 次に $xy \in \ker f$ $(x, y \in A)$ とすると,

$$0_B = f(xy) = f(x)f(y)$$

であり, B は整域だから $f(x) = 0_B$ または $f(y) = 0_B$. よって $x \in \ker f$ または $y \in \ker f$. 従って $\ker f$ は素イデアル.

問題 9-3

(1) $2 = (1+i)(1-i) \in I$ に注意する. $x + I \in A/I$ をとる. $x = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とし, さらに $a - b = 2n + r$ $(n \in \mathbb{Z}, \ r \in \{0, 1\})$ と表す. このとき,

$$x = (a - b) + b(1+i) = r + 2n + b(1+i).$$

$x - r = 2n + b(1+i) \in I$ より

$$x + I = r + I \in \{0 + I, 1 + I\}.$$

よって $A/I = \{0 + I, 1 + I\}$.

(2) $0 + I = 1 + I$ と仮定する. $1 \in I$ より $1 = (1+i)(a+bi)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と表せる. 両辺に定理 3-2 の写像 N をとると,

$$1 = N(1) = N(1+i)N(a+bi) = 2(a^2 + b^2).$$

$a^2 + b^2$ は整数より矛盾. 従って $0 + I \neq 1 + I$.

(3) (2) より $A/I \neq \{0 + I\}$. また $(1 + I)(1 + I) = 1 + I$ より, $1 + I$ は A/I の可逆元. よって A/I は体である. 定理 9-3 より I は極大イデアルである.