体論 (第 2 回) の解答

問題 2-1 の解答

(1) $y = f(x)$ のグラフを描くと, $f(x)$ は整数の根を持たないことが分かる. 従って, 定理 2-2 より $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

(2) $\alpha \in \mathbb{Q}$ と仮定する. $\alpha^2 = 2 + \sqrt{2}$ より,

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0.$$

よって, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ は α を根にもつ. 因数定理から $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ となる $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在する. 一方, $f(x)$ は $p = 2$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たすので, $\mathbb{Q}$ 上既約である. よって矛盾. 従って, α は無理数である.

問題 2-2 の解答

$g(x) = f(x + a)$ が $\mathbb{Q}$ 上可約とすると,

$$g(x) = h_1(x)h_2(x), \quad (h_1(x), h_2(x) \in \mathbb{Q}[x] \ \ \deg h_1 \geq 1,\ \deg h_2 \geq 1)$$

と表せる. このとき,

$$f(x) = g(x - a) = h_1(x - a)h_2(x - a)$$

であり, $h_1(x-a), h_2(x-a)$ はともに 1 次以上なので, $f(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約に矛盾する. 従って $f(x+a)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

問題 2-3 の解答

$f(x) = (x + 1)^5 + 4$ とすると,

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 5.$$

$f(x)$ は $p = 5$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たすので $\mathbb{Q}$ 上既約である. 問題 2-2 より, $x^5 + 4 = f(x - 1)$ も $\mathbb{Q}$ 上既約である.

問題 2-4 の解答

(1) $k! \times {}_pC_k = p \times (p-1) \times \cdots \times (p - k + 1)$ より $p \mid k! \times {}_pC_k$ である. $p \nmid k!$ より $p \mid {}_pC_k$.

(2) $f(x)(x - 1) = x^p - 1$ より

$$f(x + 1)x = (x + 1)^p - 1 = x^p + {}_pC_{p-1}x^{p-1} + \cdots + {}_pC_2x^2 + {}_pC_1x.$$

よって

$$f(x + 1) = x^{p-1} + {}_pC_{p-1}x^{p-2} + \cdots + {}_pC_2x + p.$$

(1) から $f(x + 1)$ はアイゼンシュタインの定理の条件を満たすので $\mathbb{Q}$ 上既約である. よって $f(x)$ も $\mathbb{Q}$ 上既約である.