環論 (第 11 回) の解答

問題 11-1

(1) $a \sim b$ とする．$a = ub$ $(u \in A^\times)$ と表せるので

$$(a) = (ub) = (u)(b) = (1)(b) = (b).$$

逆に $(a) = (b)$ とすると，$a = bu,\ b = av$ $(u, v \in A)$ と表せる．よって

$$a = bu = avu.$$

従って $vu = 1$ より $u \in A^\times$．よって $a \sim b$.

(2) π を素元とする．$\pi \notin A^\times$ より $(\pi) \neq A$ である．$ab \in (\pi)$ とすると，$\pi \mid ab$ であり，π は素元だから $\pi \mid a$ または $\pi \mid b$. 従って $a \in (\pi)$ または $b \in (\pi)$．よって (π) は素イデアル．

逆に (π) は素イデアルとする．$(\pi) \neq A$ より $\pi \notin A^\times$．$\pi \mid ab$ とする．$ab \in (\pi)$ より $a \in (\pi)$ または $b \in (\pi)$. 従って $\pi \mid a$ または $\pi \mid b$．よって π は素元である．

問題 11-2

(1) $(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 6$ より $1+\sqrt{-5} \mid 6$．また

$$\frac{1+\sqrt{-5}}{1-\sqrt{-5}} = \frac{-2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{-5} \notin A.$$

よって $1-\sqrt{-5} \nmid 1+\sqrt{-5}$.

(2) $\pm 1 \in A^\times$ である．逆に $\alpha \in A^\times$ とし，

$$\alpha = a + b\sqrt{-5} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

と表す．定理 3-2 の写像 $N : A \to \mathbb{Z}$ $(x + y\sqrt{-5} \mapsto x^2 + 5y^2)$ を考えると，$\alpha \in A^\times$ より

$$\pm 1 = N(\alpha) = a^2 + 5b^2.$$

よって $(a, b) = (\pm 1, 0)$ より，$\alpha = \pm 1$. 以上より $A^\times = \{\pm 1\}$.

(3) $\alpha \mid 1+\sqrt{-5}$ とする．$1+\sqrt{-5} = \alpha\beta$ を満たす $\beta \in A$ がとれる．ここで，

$$\alpha = a + b\sqrt{-5}, \quad \beta = c + d\sqrt{-5} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$$

と置く．このとき，

$$6 = N(1+\sqrt{-5}) = N(\alpha)N(\beta) = (a^2+5b^2)(c^2+5d^2).$$

よって $a^2 + 5b^2$ は 1, 2, 3, 6 のいずれか．従って

$$(a, b) = (\pm 1, 0),\ (\pm 1, 1),\ (\pm 1, -1).$$

よって α は $\pm 1,\ \pm 1+\sqrt{-5},\ \pm 1-\sqrt{-5}$ のいずれか. (1) より $\pm(1-\sqrt{-5})$ は $1+\sqrt{-5}$ を割らない. よって α は $\pm 1,\ \pm(1+\sqrt{-5})$ のいずれか. よって $\alpha \in A^\times$ または $\alpha \sim 1+\sqrt{-5}$. 従って $1+\sqrt{-5}$ は既約元である.

(4) $(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 6 = 2\cdot 3$ より $1+\sqrt{-5} \mid 2\cdot 3$. 一方,

$$\frac{2}{1+\sqrt{-5}} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{-5}}{3} \notin A, \qquad \frac{3}{1+\sqrt{-5}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-5}}{2} \notin A.$$

より, $1+\sqrt{-5}$ は 2, 3 を割らない. 従って $1+\sqrt{-5}$ は素元でない.

問題 11-3

π を既約元とする. A は UFD なので

$$\pi = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \quad (\lambda_i : 素元)$$

と表せる. $\lambda_1 \mid \pi$ より $\lambda_1 \in A^\times$ または $\pi \sim \lambda_1$ である. λ_1 は素元より $\pi \sim \lambda_1$. 従って π は素元.

[補足]

整域 $A = \{a+b\sqrt{-5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ で考える. 問題 11-2 より $1+\sqrt{-5}$ は既約元であるが, 素元でない. これと問題 11-3 から A は UFD でないことが分かる.