体論 (第 7 回)

分離拡大

議論を簡単にするために, 以後, 体は全て $\mathbb{C}$ の部分体を考える. 一般的な場合は参考文献 [1] を参照のこと.

定義 7-1 (共役)
体 K を $\mathbb{C}$ の部分体とし, $\alpha \in \mathbb{C}$ が K 上代数的とする. このとき, α の K 上の最小多項式の根を α の K **上共役**という.

[補足] $\alpha \in K$ のとき, α の K 上の最小多項式は $f(x) = x - \alpha$ である. 従って, α の K 上共役は α のみである.

例 7-1
$\alpha = \sqrt[4]{2}$ とし, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ とする.

(1) α の $\mathbb{Q}$ 上共役全体は $\{\pm\alpha,\ \pm\alpha i\}$.

(2) α の K 上共役全体は $\{\pm\alpha\}$.

(3) α の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上共役全体は $\{\alpha\}$.

[証明]
(1) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $f(x) = x^4 - 2$ であり,

$$f(x) = x^4 - \alpha^4 = (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\alpha i)(x+\alpha i).$$

従って, α の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\pm\alpha,\ \pm\alpha i$.

(2) $\sqrt{2} = \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ より, $K \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ である. ここで,

$$[K(\alpha) : K] = [\mathbb{Q}(\alpha) : K] = 2$$

であるから, $g(x) = x^2 - \sqrt{2} \in K[x]$ が α の K 上の最小多項式となる. 従って α の K 上共役は $\pm\alpha$ である.

(3) $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$ より, α の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上共役は α のみである.

□

問題 7-1 $\alpha = \sqrt{-3+\sqrt{3}}$ と置く.

(1) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(2) α の $\mathbb{Q}$ 上共役を求めよ.

(3) α の $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上共役を求めよ.

定理 7-1

K, M を $\mathbb{C}$ の部分体とし, $K \subseteq M$ とする. $\alpha \in \mathbb{C}$ は K 上代数的とし, $f(x)$ をその K 上の最小多項式とする. このとき,

(1) β が α の K 上共役ならば, β の K 上の最小多項式も $f(x)$ である.

(2) γ が α の M 上共役ならば, γ は α の K 上共役でもある.

[証明]

(1) β が α の K 上共役より $f(\beta) = 0$. また $f(x)$ は α の K 上の最小多項式より, モニックかつ K 上既約である. よって, 定理 3-2 より $f(x)$ は β の K 上の最小多項式である.

(2) $g(x)$ を α の M 上の最小多項式とする. $f(\alpha) = 0$ かつ $f(x) \in K[x] \subseteq M[x]$ に注意すると, 定理 3-1 から $f(x) = g(x)h(x)$ となる $h(x) \in M[x]$ が存在する. よって

$$f(\gamma) = g(\gamma)h(\gamma) = 0$$

であるから, γ は α の K 上共役である.

□

定義 7-2 (分離拡大)

L/K を代数拡大とする. 任意の L の元の K 上の最小多項式が重根を持たないとき, L/K を**分離拡大**という.

L/K を分離拡大とし, $\alpha \in L$ をとる. このとき, α の K 上の最小多項式 $f(x)$ は重根を持たないから, α の K 上共役の個数は $f(x)$ の次数と一致する. よって

$$^{\#}\{\beta \mid \beta \text{ は } \alpha \text{ の } K \text{ 上共役 }\} = \deg f = [K(\alpha):K].$$

分離拡大の例を紹介する.

例 7-2
$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は分離拡大である.

[証明]
$\alpha \in \mathbb{C}$ をとり, その $\mathbb{R}$ 上の最小多項式を $f(x)$ とする.

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ のときは $f(x) = x - \alpha$ である.

(ii) $\alpha \notin \mathbb{R}$ のとき,

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \in \mathbb{R}[x].$$

ただし, $\bar{\alpha}$ は α の複素共役. また $\alpha \notin \mathbb{R}$ より $\alpha \neq \bar{\alpha}$ に注意する.

(i)(ii) のどちらのケースでも, $f(x)$ は重根をもたない. よって, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は分離拡大である.

□

一般的に $\mathbb{C}$ 内に含まれる代数拡大はすべて分離拡大となる.

定理 7-2
K, L を $\mathbb{C}$ の部分体とする. L/K が代数拡大ならば, L/K は分離拡大でもある.

[証明]
$\alpha \in L$ とし, その K 上の最小多項式を

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

とする. 仮に $f(x)$ が重根 β を持つとすると,

$$f(x) = (x-\beta)^2 h(x)$$

となる $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在する. β は α の K 上共役より, 定理 7-1 (1) から β の K 上の最小多項式も $f(x)$ となる. $f(x)$ を微分すると,

$$f'(x) = 2(x-\beta)h(x) + (x-\beta)^2 h'(x).$$

よって $f'(\beta) = 0$ であり, また

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \in K[x]$$

から $\deg f' < \deg f$. これは, $f(x)$ が β の K 上の最小多項式に矛盾する. よって, $f(x)$ は重根を持たない. 従って, L/K は分離拡大である.

□

問題 7-2 3 以上の素数 p に対して, $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $\beta = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ と置く.

(1) α の $\mathbb{Q}$ 上共役を α の式で表せ.

(2) $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ を示せ.

(3) α の $\mathbb{Q}(\beta)$ 上共役を α の式で表せ.

問題 7-3 L/K を分離拡大とし, $\alpha \in L$ とする. また $\alpha_1, ..., \alpha_n$ を α の K 上共役全体とする. このとき, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ と $\beta_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$ は K の元であることを示せ.

参考文献

[1] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社.