体論 (第 7 回) の解答

問題 7-1 の解答

(1) $\alpha^2+3=\sqrt{3}$ より

$$(\alpha^2+3)^2-3=\alpha^4+6\alpha^2+6=0.$$

$f(x)=x^4+6x^2+6$ と置くと $f(\alpha)=0$ である．また, $p=3$ でアイゼンシュタインの定理が適用できるので, $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約．よって $f(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である．

(2) $f(x)$ を因数分解すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3)^2-3=(x^2+3-\sqrt{3})(x^2+3+\sqrt{3}) \\ &= (x^2-(-3+\sqrt{3}))(x^2-(-3-\sqrt{3})) \\ &= \left(x+\sqrt{-3+\sqrt{3}}\right)\left(x-\sqrt{-3+\sqrt{3}}\right)\left(x-\sqrt{-3-\sqrt{3}}\right)\left(x+\sqrt{-3-\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

従って, α の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\pm\sqrt{-3+\sqrt{3}},\quad \pm\sqrt{-3-\sqrt{3}}$.

(3) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ と置く．$\sqrt{3}=\alpha^2+3\in\mathbb{Q}(\alpha)$ より $K\subseteq\mathbb{Q}(\alpha)$．また

$$4=\deg f=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha):K][K:\mathbb{Q}]=[K(\alpha):K]\times 2$$

より $[K(\alpha):K]=2$．よって, α の K 上の最小多項式の次数は 2 である．一方,

$$g(x)=x^2-(\sqrt{3}-3)\in K[x]$$

と置くと, $g(\alpha)=0$ である．従って $g(x)$ が α の K 上の最小多項式である．よって α の K 上共役は $\pm\sqrt{\sqrt{3}-3}$ である．

□

問題 7-2 の解答

(1) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は

$$f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

で与えられる (問題 3-3 を参照)．また $\alpha^p=1$ より

$$f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=\prod_{i=1}^{p-1}(x-\alpha^i).$$

copyright © 大学数学の授業ノート

よって α の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\alpha,\ \alpha^2, ..., \alpha^{p-1}$ である.

(2) $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$ より $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. 一方,

$$\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right), \qquad \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha} = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right).$$

よって

$$\beta = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

(3) $K = \mathbb{Q}(\beta)$ と置く. $\alpha \notin \mathbb{R}$ より $\alpha \notin K$. 従って α の K 上の最小多項式の次数は 2 以上. 一方,

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

より, $g(x) = x^2 - 2\beta x + 1 \in K[x]$ と置くと $g(\alpha) = 0$. よって $g(x)$ が α の K 上の最小多項式である. ここで

$$g(x) = \Big(x - \alpha\Big)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)$$

と分解できるので, $\alpha,\ \frac{1}{\alpha}$ が α の K 上共役である.

問題 7-3 の解答

α の K 上の最小多項式を $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ と置く. L/K は分離拡大より, $f(x)$ は重根を持たない. 従って

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

右辺を展開し, $n-1$ 次と 0 次の項を比較すると

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -a_{n-1}, \qquad \beta_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n a_0.$$

従って $\beta_1, \beta_2 \in K$ となる.