体論 (第8回)

8. 準同型写像

今回は体の準同型写像の性質をみていきます.

定義 8-1 (K-準同型)
L_1, L_2 を $\mathbb{C}/K$ の中間体とする. $\sigma : L_1 \to L_2$ が次の (1), (2) を満たすとき, K-**準同型**と言う.

(1) σ は環準同型. つまり,

(1-i) $x, y \in L_1$ のとき, $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

(1-ii) $x, y \in L_1$ のとき, $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

(1-iii) $\sigma(1) = 1$.

(2) $\sigma\,|_K = \mathrm{Id}_K$ である. つまり, 任意の $a \in K$ に対して $\sigma(a) = a$ が成り立つ.

L_1 から L_2 への K-準同型全体を $\mathrm{Hom}_K(L_1, L_2)$ で表す.

※ $1 \in K$ より (2) $\Rightarrow$ (1-iii) が分かる. よって, (1-i), (1-ii), (2) が成り立てば, σ は K-準同型である.

※ K-準同型 σ は K-線形写像となる.

K-準同型の例を挙げておく.

例 8-1
$\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2} \quad (a, b \in \mathbb{Q}).$$

このとき, σ は $\mathbb{Q}$-準同型である.

[証明]

定義 8-1 の (1-i), (1-ii), (2) を示せばよい．まず, $x = a+b\sqrt{2}$, $y = c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Q})$ をとる．

(1-i) について．

$$\begin{aligned}\sigma(x+y) &= \sigma((a+c)+(b+d)\sqrt{2}) \\ &= (a+c)-(b+d)\sqrt{2} \\ &= (a-b\sqrt{2})+(c-d\sqrt{2}) \\ &= \sigma(x)+\sigma(y).\end{aligned}$$

(1-ii) について．

$$\begin{aligned}\sigma(xy) &= \sigma((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) \\ &= \sigma((ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}) \\ &= (ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2} \\ &= (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) \\ &= \sigma(x)\sigma(y).\end{aligned}$$

(2) $a \in \mathbb{Q}$ に対して,

$$\sigma(a) = \sigma(a+0\cdot\sqrt{2}) = a-0\cdot\sqrt{2} = a.$$

従って, $\sigma\mid_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

$\square$

問題 8-1 $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(z \to \bar{z})$ を考える．ただし, $\bar{z}$ は z の複素共役である．このとき, σ は $\mathbb{R}$-準同型であることを示せ．

定理 8-1

K を $\mathbb{C}$ の部分体, $\alpha \in \mathbb{C}$ を K 上代数的とする．$f(x)$ を α の K 上の最小多項式とし, $n = \deg f$ と置く．α の K 上共役全体を $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする．

(1) $1 \leq i \leq n$ に対して, $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$ を満たす $\sigma_i \in \mathrm{Hom}_K(K(\alpha), \mathbb{C})$ が存在する．

(2) $\mathrm{Hom}_K(K(\alpha), \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ である．特に

$$|\mathrm{Hom}_K(K(\alpha), \mathbb{C})| = [K(\alpha) : K].$$

[補足] 一般的に, L/K が有限次分離拡大ならば, $|\mathrm{Hom}_K(L,\mathbb{C})| = [L:K]$ が成り立つ (文献 [1] 定理 3.3.21)

証明の前に, 定理の使い方を確認しておく.

例 8-2
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\mathbb{C})$ を求めよ.

[解答]
$\sqrt{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\pm\sqrt{2}$ であるから, 定理 8-1 より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\mathbb{C}) = \{\tau_1, \tau_2\}$$

と表せる. ここで, τ_1, τ_2 はそれぞれ次で定まるものとする.

$$\tau_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad \tau_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

τ_1, τ_2 による $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ の行き先を計算すると,

$$\begin{aligned} \tau_1(a+b\sqrt{2}) &= \tau_1(a) + \tau_1(b)\tau_1(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}, \\ \tau_2(a+b\sqrt{2}) &= \tau_2(a) + \tau_2(b)\tau_2(\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}. \end{aligned}$$

従って $\tau_1 = \mathrm{Id}$ であり, $\tau_2 = \sigma$ (例 8-1 のもの) となる.

□

[定理 8-1 の証明]
(1) α_i は α の K 上共役より, α_i の K 上の最小多項式も $f(x)$ である. ここで, 次の環の同型写像

$$\Phi_i : K[x]/(f(x)) \to K(\alpha_i) \quad \left(\overline{g(x)} \mapsto g(\alpha_i)\right)$$

を考える (定理 4-2 の補足を参照). $\sigma_i = \Phi_i \circ \Phi_1^{-1}$ と置けば, $\sigma_i : K(\alpha) \to K(\alpha_i)$ は環の同型写像で, さらに $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$ であり, $\sigma_i\,|_K = \mathrm{Id}_K$ を満たす. また $K(\alpha_i) \subseteq \mathbb{C}$ なので, $\sigma_i \in \mathrm{Hom}_K(K(\alpha),\mathbb{C})$ となる.

(2) $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(K(\alpha),\mathbb{C})$ を取る. α の K 上の最小多項式を

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[x]$$

で表す. σ は K-準同型より

$$\begin{aligned} f(\sigma(\alpha)) &= \sigma(\alpha)^n + a_{n-1}\sigma(\alpha)^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= \sigma(\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= \sigma(f(\alpha)) = 0. \end{aligned}$$

これより, $\sigma(\alpha)=\alpha_i$ を満たす $1\le i\le n$ がある. $\beta\in K(\alpha)$ を取り,

$$\beta=\sum_{j=0}^{n-1} b_j\alpha^j \quad (b_j\in K)$$

と表す. $\sigma(\alpha)=\sigma_i(\alpha)$ より,

$$\sigma(\beta)=\sum_{j=0}^{n-1}\sigma(b_j)\sigma(\alpha)^j=\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_i(b_j)\sigma_i(\alpha)^j=\sigma_i(\beta).$$

よって $\sigma=\sigma_i\in\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ を得る.

以上より $\mathrm{Hom}_K(K(\alpha),\mathbb{C})=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ が成り立ち, また

$$|\mathrm{Hom}_K(K(\alpha),\mathbb{C})|=n=\deg f=[K(\alpha):K].$$

□

問題 8-2 $\alpha=\sqrt[4]{2}$ とし, $K=\mathbb{Q}(\alpha)$ と置く. K から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{Q}$-準同型を次で定める.

$$\sigma_1(\alpha)=\alpha,\ \ \sigma_2(\alpha)=-\alpha,\ \ \sigma_3(\alpha)=i\alpha,\ \ \sigma_4(\alpha)=-i\alpha.$$

また

$$\beta_1=1+\alpha+3\alpha^2,\ \ \beta_2=\frac{1+\alpha}{1-\alpha},\quad \beta_3=1+\alpha^2$$

と置く.

(1) $I_1=\sigma_4(\beta_1)$, $I_2=\sigma_4(\beta_2)$ をそれぞれ α, i を用いて表せ.

(2) $I_3=\sigma_1(\beta_3)\sigma_2(\beta_3)\sigma_3(\beta_3)\sigma_4(\beta_3)$ を計算せよ.

(3) $\gamma\in K$ とする. $\sigma_4(\gamma)=\gamma$ ならば $\gamma\in\mathbb{Q}$ を示せ.

参考文献

[1] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010.