体論 (第 9 回)

9. 単拡大

今回はまず $\mathbb{C}$ に含まれる任意の有限次拡大が単拡大になることを証明する．また後半では, K-準同型と K 上共役との関係をみる．

定義 9-1(単拡大)
体の拡大 L/K は $L = K(\alpha)$ $(\alpha \in L)$ と表せるとき, **単拡大**といい, このときの α を L の**原始元**と呼ぶ.

$\mathbb{C}$ に含まれる有限次拡大はすべて単拡大である.

定理 9-1
L を $\mathbb{C}$ の部分体とし, L/K は有限次拡大とする.

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が K 上代数的ならば, $K(\alpha, \beta) = K(\gamma)$ となる $\gamma \in \mathbb{C}$ が存在する.

(2) L/K は単拡大である.

[証明]
(1) α と β の K 上共役全体をそれぞれ $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ とし,

$$c \notin \left\{ \frac{\beta_j - \beta}{\alpha - \alpha_i} \mid 2 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \right\} \qquad \text{(eq1)}$$

を満たす $c \in K$ を取る．$\gamma = \beta + c\alpha$ と置けば, $K(\gamma) \subseteq K(\alpha, \beta)$ である.

仮に $K(\gamma) \neq K(\alpha, \beta)$ とする． $M = K(\gamma)$ として, $f(x)$ を α の M 上の最小多項式とする． $M \neq K(\alpha, \beta)$ より $\alpha \notin M$ である．よって $\deg f \geq 2$. そこで, $f(\delta) = 0$ を満たす $\delta \in \mathbb{C}$ $(\delta \neq \alpha)$ を取る．δ は α の M 上共役より, 定理 7-1 から α の K 上共役でもある．従って $\delta = \alpha_i$ $(2 \leq i \leq m)$ と表せる.

次に $g(x)$ を β の K 上の最小多項式とし, $G(x) = g(\gamma - cx) \in M[x]$ と置く．このとき, $G(\alpha) = g(\gamma - c\alpha) = 0$. 定理 3-1 より $f(x) \mid G(x)$ である．従って, $f(\alpha_i) = 0$ より $g(\gamma - c\alpha_i) = G(\alpha_i) = 0$. よって, $\beta_j = \gamma - c\alpha_i$ $(2 \leq j \leq n)$ と表せる．$\gamma = \beta + c\alpha$ より, $\beta_j - \beta = c(\alpha - \alpha_i)$ となり, c の取り方に矛盾．以上より $K(\gamma) = K(\alpha, \beta)$.

(2) 問題 6-2 より,

$$L = K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \quad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in L)$$

と表せる. $n \geq 3$ の場合を示せばよい. $M = K(\alpha_1, \alpha_2)$ と置くと, (1) より $M = K(\beta)$ を満たす $\beta \in M$ が取れる. 従って

$$L = M(\alpha_3, ..., \alpha_n) = K(\underbrace{\beta, \alpha_3, ..., \alpha_n}_{n-1\ \text{個}}).$$

この操作を繰り返せば $L = K(\gamma)$ $(\gamma \in L)$ の形に変形することができる.

□

[補足] より一般的に, 有限次分離拡大は単拡大であることが示せる (参考文献 [1] 定理 3.7.1).

問題 9-1 定理 9-1 の証明を参考にして, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})$ を示せ.

次に K-準同型と共役元との関係を考察する.

定理 9-2

L を $\mathbb{C}$ の部分体とし, L/K を有限次拡大とする. $\beta \in L$ に対して,

$$\{\gamma \in \mathbb{C} \mid \gamma\ \text{は}\ \beta\ \text{の}\ K\ \text{上共役}\} = \{\sigma(\beta) \mid \sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, \mathbb{C})\}.$$

証明の前にこの定理の使い方をみておく. 定理 9-2 より, $\mathrm{Hom}_K(L, \mathbb{C})$ を用いて L の各元の共役を計算できる.

例題 9-1

$\alpha = \sqrt[4]{2}$, $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ とする. このとき, α の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\pm\alpha$, $\pm\alpha i$ である. 定理 8-1 より,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$$

と表せる. ここで, 各 σ_i は $\sigma_1(\alpha) = \alpha$, $\sigma_2(\alpha) = -\alpha$, $\sigma_3(\alpha) = \alpha i$, $\sigma_4(\alpha) = -\alpha i$ を満たすものとする.

(1) $\beta = 2 + \alpha^3$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役を求めよ.

(2) $\beta = 2 + \alpha^3$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

[解答]

(1) 定理 9-2 から, β の $\mathbb{Q}$ 上共役全体は次で与えられる.

$$\begin{aligned}\sigma_1(\beta) &= \sigma_1(2)+\sigma_1(\alpha)^3 = 2+\alpha^3,\\ \sigma_2(\beta) &= \sigma_2(2)+\sigma_2(\alpha)^3 = 2-\alpha^3,\\ \sigma_3(\beta) &= \sigma_3(2)+\sigma_3(\alpha)^3 = 2-i\alpha^3,\\ \sigma_4(\beta) &= \sigma_4(2)+\sigma_4(\alpha)^3 = 2+i\alpha^3.\end{aligned}$$

(2) $f(x)$ を β の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式とする. $f(x)$ の根は $\sigma_1(\beta),\sigma_2(\beta),\sigma_3(\beta),\sigma_4(\beta)$ なので,

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-(2+\alpha^3))(x-(2-\alpha^3))(x-(2-i\alpha^3))(x-(2+i\alpha^3))\\ &= \prod_{n=0}^{3}((x-2)-i^n\alpha^3)\\ &= (x-2)^4-(\alpha^3)^4\\ &= x^4-8x^3+24x^2-32x+8.\end{aligned}$$

□

定理 9-2 の証明のために次の補題を準備する.

補題 9-1
L を $\mathbb{C}$ の部分体とし, L/K を有限次拡大とする. M を L/K の中間体とし, $\tau\in\mathrm{Hom}_K(M,\mathbb{C})$ とする. このとき, $\sigma\mid_M=\tau$ となる $\sigma\in\mathrm{Hom}_K(L,\mathbb{C})$ が存在する.

[証明]

証明のアイデアは定理 8-1 と同様である. 詳細は参考文献 [1] 補題 3.2.2 を参照のこと.

□

[定理 9-2 の証明]

$\supseteq$ について. $f(x)$ を β の K 上の最小多項式とし, $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in K[x]$ と置く. このとき,

$$\begin{aligned}f(\sigma(\beta)) &= \sigma(\beta)^n+a_{n-1}\sigma(\beta)^{n-1}+\cdots+a_0\\ &= \sigma(\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

従って, $\sigma(\beta)$ は β の K 上共役である.

$\subseteq$ について．γ を $\beta \in L$ の K 上共役とする．定理 8-1 より $\tau(\beta) = \gamma$ となる $\tau \in \mathrm{Hom}_K(K(\beta), \mathbb{C})$ が取れる．さらに, 補題 9-1 より $\sigma\,|_{K(\beta)} = \tau$ となる $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, \mathbb{C})$ が存在する．このとき,

$$\sigma(\beta) = \tau(\beta) = \gamma$$

が成り立つ.

$\square$

問題 9-2　$\alpha = \sqrt[4]{2}$ とし, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ を例 9-1 のものとする．また, $\beta = 2\alpha + \alpha^2$ とする．

(1) $\sigma_n(\beta)$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ を α と i を用いて表せ.

(2) β の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ.

参考文献

[1] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010.