体論 (第 9 回) の解答

問題 9-1 の解答

$\alpha = \sqrt{3},\ \beta = \sqrt[3]{2}$ とする． α の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\alpha_1 = \sqrt{3},\ \alpha_2 = -\sqrt{3}$ であり, β の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\beta_1 = \sqrt[3]{2},\ \beta_2 = \sqrt[3]{2}\omega,\ \beta_3 = \sqrt[3]{2}\omega^2$ である．ただし, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である．従って, 定理 9-1 の (eq1) の集合を考えると,

$$S = \left\{ \frac{\beta_j - \beta}{\alpha - \alpha_i} \mid 2 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3 \right\} = \left\{ \frac{(\omega^k - 1)\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}} \mid k = 0, 1, 2 \right\}.$$

$1 \notin S$ より, $\gamma = \alpha + \beta$ とすると, 定理 9-1 の証明から $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$ となる．

問題 9-2 の解答

(1) について．

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\beta) &= 2\sigma_1(\alpha) + \sigma_1(\alpha)^2 = 2\alpha + \alpha^2, \\
\sigma_2(\beta) &= 2\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\alpha)^2 = -2\alpha + \alpha^2, \\
\sigma_3(\beta) &= 2\sigma_3(\alpha) + \sigma_3(\alpha)^2 = 2i\alpha - \alpha^2, \\
\sigma_4(\beta) &= 2\sigma_4(\alpha) + \sigma_4(\alpha)^2 = -2i\alpha - \alpha^2.
\end{aligned}$$

(2) $\sigma_1(\beta),\ \sigma_2(\beta), \sigma_3(\beta),\ \sigma_4(\beta)$ は $f(x)$ の根全体なので,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - \sigma_1(\beta))(x - \sigma_2(\beta))(x - \sigma_3(\beta))(x - \sigma_4(\beta)) \\
&= ((x - \alpha^2) - 2\alpha)((x - \alpha^2) + 2\alpha)((x + \alpha^2) - 2i\alpha)((x + \alpha^2) + 2i\alpha) \\
&= ((x - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2)((x + \alpha^2)^2 + 4\alpha^2) \\
&= (x^2 - 2\alpha^2 x + 2 - 4\alpha^2)(x^2 + 2\alpha^2 x + 2 + 4\alpha^2) \\
&= ((x^2 + 2) - 2\alpha^2(x + 2))((x^2 + 2) + 2\alpha^2(x + 2)) \\
&= (x^2 + 2)^2 - 8(x + 2)^2 \\
&= x^4 - 4x^2 - 32x - 28.
\end{aligned}$$