群論 (第 2 回) の解答

問題 2-1 の解答

$$\begin{aligned}
\sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \\
\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \\
\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問題 2-2 の解答

(1) について.

$$\begin{aligned}
\sigma &= (1\ 5\ 3\ 2\ 7)(4\ 6) = (1\ 5)(5\ 3)(3\ 2)(2\ 7)(4\ 6), \\
\tau &= (2\ 4)(3\ 5\ 6) = (2\ 4)(3\ 5)(5\ 6).
\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1, \quad \mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^3 = -1.$$

(2) $(1\ 5\ 3\ 2\ 7)^5 = (4\ 6)^2 = \mathrm{Id}$ より,

$$\sigma^{15} = (1\ 5\ 3\ 2\ 7)^{15}(4\ 6)^{15} = (4\ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

また

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$(\tau\sigma\tau^{-1})^{15} = \tau\sigma^{15}\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(3) $\eta^2 = \sigma$ を満たす $\eta \in S_7$ が存在したと仮定する. $\mathrm{sgn}(\eta) = \pm 1$ より,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\eta^2) = \mathrm{sgn}(\eta)^2 = 1.$$

これは $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ に矛盾. 従って $\eta^2 = \sigma$ を満たす $\eta \in S_7$ は存在しない.

問題 2-3 の解答

(1) $\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots \sigma(a_s))$ を示すためには, 各 $x \in \{1, 2, ..., n\}$ の移り先が一致することを示せばよい.

(i) $x = \sigma(a_i)(i = 1, 2, ..., s-1)$ のとき.

$$(\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s)\sigma^{-1})(x) = (\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s))(a_i) = \sigma(a_{i+1}).$$

(ii) $x = \sigma(a_s)$ のとき.

$$(\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s)\sigma^{-1})(x) = (\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s))(a_s) = \sigma(a_1).$$

(iii) $x \neq \sigma(a_i)$ $(i = 1, 2, ..., s)$ のとき, $\sigma^{-1}(x)$ は $a_1, a_2, ..., a_s$ のいずれとも異なるので,

$$(\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s)\sigma^{-1})(x) = (\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s))(\sigma^{-1}(x)) = \sigma(\sigma^{-1}(x)) = x.$$

以上より, $\sigma(a_1\ a_2\ \cdots a_s)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots \sigma(a_s))$ が成り立つ.

(2) $\sigma \in S_4$ とする. (1) より

$$\begin{aligned} \sigma(12)\sigma^{-1} = (3\ 4) \quad &\Longleftrightarrow \quad (\sigma(1)\ \sigma(2)) = (3\ 4) \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{「}\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4\text{」または「}\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 3\text{」}. \end{aligned}$$

よって

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$