# 群論 (第 6 回)

## 6. 群の準同型

今回は群の準同型について解説します.

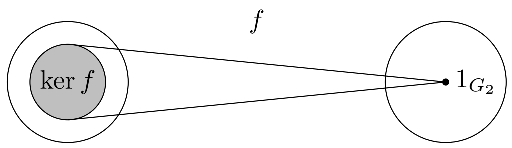
**定義 6-1(準同型)**
群の間の写像 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ が**準同型**とは

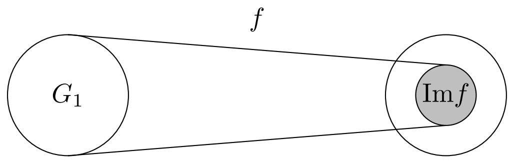
$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (\forall x, \forall y \in G_1)$$

を満たすことである. また, このとき,

$$\ker f = \{x \in G_1 \mid f(x) = 1_{G_2}\}, \qquad \mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in G_1\}.$$

と置き, $\ker f$ を $f$ の**核**, $\mathrm{Im} f$ を $f$ の**像**と言う.




定義から準同型は群の演算を保つような写像と言えます. では, 例題で準同型の例を確認しておきます.

**例題 6-1**
写像 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $((x, y) \longmapsto x - y)$ は準同型であり, さらに $\ker f$ と $\mathrm{Im} f$ を求めよ.

**[証明]**

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \\ &= f((x_1, y_1)) + f((x_2, y_2)). \end{aligned}$$

従って $f$ は準同型である．また

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

次に $y \in \mathbb{R}$ に対して, $P = (y, 0)$ と置くと, $f(P) = f((y, 0)) = y$. よって $f$ は全射. 特に $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

□

**問題 6-1** $f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x \longmapsto \log |x|)$ が準同型であることを示せ．また $\ker f$ と $\mathrm{Im} f$ を求めよ．

**問題 6-2** $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ $((x, y, z) \mapsto x - 2y - 2z)$ を考える．

(1) $f$ が準同型であることを示せ．

(2) 集合 $M$ を

$$M = \{(x, y, z) \in \ker f \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

で定めるとき, $M$ に含まれる元をすべて求めよ．

次に準同型の性質についてみます．

**定理 6-1**

群の間の準同型 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ について次が成り立つ．

(1) $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$.

(2) $x \in G_1$ に対して $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

(3) $\ker f$ は $G_1$ の部分群.

(4) $\mathrm{Im} f$ は $G_2$ の部分群.

(5) $\ker f = \{1_{G_1}\} \iff f$ が単射.

**[証明]**

(1) $f$ は準同型より, $f(1_{G_1}) = f(1_{G_1} \cdot 1_{G_1}) = f(1_{G_1}) f(1_{G_1})$. この両辺に $f(1_{G_1})^{-1}$ をかけると, $1_{G_2} = f(1_{G_1})$ を得る．

(2) $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$. この両辺に左から $f(x)^{-1}$ をかけると $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ を得る.

(3) について.

(i) (1) より $1_{G_1} \in \ker f$.

(ii) $x_1, x_2 \in \ker f$ とすると, $f(x_1) = f(x_2) = 1_{G_2}$. よって, $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) = 1_{G_2}$ であるから, $x_1x_2 \in \ker f$.

(iii) $x \in \ker f$ を取る. $f(x) = 1_{G_2}$ より $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = 1_{G_2}^{-1} = 1_{G_2}$. 従って, $x^{-1} \in \ker f$.

以上より $\ker f$ は $G_1$ の部分群である.

(4) 問題 6-3 を参照のこと.

(5) $f$ が単射と仮定する. $x \in \ker f$ とすると, $1_{G_1} \in \ker f$ より $f(x) = 1_{G_2} = f(1_{G_1})$. 仮定から $f$ は単射なので $x = 1_{G_1}$. よって $\ker f = \{1_{G_1}\}$.

逆に $\ker f = \{1_{G_1}\}$ を仮定する. $x, y \in G_1(f(x) = f(y))$ とすると,

$$1_{G_2} = f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}).$$

よって $xy^{-1} \in \ker f = \{1_{G_1}\}$. これより $xy^{-1} = 1_{G_1}$ であり, $x = y$ が従う. 従って $f$ は単射.

□

**問題 6-3** 定理 6-1 (4) を示せ.

**問題 6-4** 群の単射準同型 $f : G_1 \to G_2$ と $a \in G_1$ を考える. このとき, $|f(a)| = |a|$ を示せ.