群論 (第6回) の解答

問題 6-1 の解答

$x, y \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f(xy) = \log|xy| = \log|x| + \log|y| = f(x) + f(y).$$

従って f は準同型. また

$$\ker f = \{x \in \mathbb{C} \mid \log|x| = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}.$$

$y \in \mathbb{R}$ に対して, $x = e^y$ と置くと $f(x) = \log|e^y| = y$. よって f は全射. 従って Im $f = \mathbb{R}$.

問題 6-2 の解答

(1) (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{Z}^3$ に対し,

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 - 2y_1 - 2z_1) + (x_2 - 2y_2 - 2z_2) \\ &= f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) \end{aligned}$$

よって f は準同型.

(2) $(x, y, z) \in M$ を取る. $(x, y, z) \in \ker f$ より,

$$0 = f((x, y, z)) = x - 2y - 2z.$$

従って $x = 2y + 2z$. よって

$$4(y + z)^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 4$$

より $(y + z)^2 < 1$. ここで, $y + z$ は整数だから $y + z = 0$ でなければならない. 従って $x = 0$. また $y^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 4$ より $-2 < y < 2$. よって $y = -1,\ 0,\ 1$. 以上より

$$(x, y, z) = (0, -1, 1),\ \ (0, 0, 0),\ \ (0, 1, -1).$$

従って

$$M = \{(0, -1, 1),\ \ (0, 0, 0),\ \ (0, 1, -1)\}.$$

問題 6-3 の解答

(i) $1_{G_2} = f(1_{G_1})$ より $1_{G_1} \in \mathrm{Im} f$.

(ii) $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\ f$ とする． $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ を満たす $x_1, x_2 \in G_1$ を取る． このとき, $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) = y_1y_2$. 従って $y_1y_2 \in \mathrm{Im}\ f$.

(iii) $y \in \mathrm{Im}\ f$ とする． $f(x) = y$ を満たす $x \in G_1$ を取れば, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = y^{-1}$. 従って $y^{-1} \in \mathrm{Im}\ f$.

以上より $\mathrm{Im}\ f$ は G_2 の部分群である.

問題 6-4 の解答

(i) $|a| = n$ より $a^n = 1_{G_1}$. f は準同型より $f(a)^n = f(a^n) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$.

(ii) $f(a)^l = 1_{G_2}$ (l: 自然数) とする．このとき,

$$f(a^l) = 1_{G_2} = f(1_{G_1}).$$

f は単射より $a^l = 1_{G_1}$ が成り立つ. $|a| = n$ より $l \geq n$.

以上より $|f(a)| = n$ である.