教養の微積 (2 回目)

2. 級数の極限

今回は級数の基本事項について解説し, さらに様々な級数の収束性や値について調べます.

定義 2-1 (級数)
数列 $\{a_n\}$ に対して, 形式的な和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

を**級数**といい, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で表す. 自然数 n に対して,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と置く. 数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に収束するといい, S を**級数の和**という. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

で表す. 数列 $\{S_n\}$ が発散するときは, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという.

例えば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

について考えます. 第 n 項までの和を S_n とすると, 等比数列の和の公式より,

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

従って, 数列 $\{S_n\}$ は 1 に収束するので,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

例題 2-1
次の級数の和を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

[**解答**]
(1) 第 n 項までの和を S_n とおくと,

$$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}.$$

従って

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}S_n=2.$$

(2) 第 n 項までの和を S_n とおく.

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

従って

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

□

問題 2-1 次の級数の和を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)(2n-1)} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$$

次は級数が発散する場合を考えます.

例題 2-2
次の級数は発散することを示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \qquad \text{(eq1)}$$

[解答]
第 n 項までの和を S_n とおく. このとき,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \cdots$$

となり, $\{S_n\}$ は 1 と 0 を繰り返して収束しない. よって級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ は発散する.

[補足] (eq1) は数列

$$a_n = (-1)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

に対する級数の和を表しています. 一方, (eq1) に次のように括弧をつけます.

$$\{1 + (-1)\} + \{1 + (-1)\} + \cdots \qquad \text{(eq2)}$$

(eq2) は数列

$$b_n = 1 + (-1) = 0 \quad (n = 1, 2, ...)$$

に対する級数の和を表しており, 第 n 項までの和は

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0.$$

よって級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} T_n = 0$$

と計算できます. このように級数は括弧のつけ方で意味が変わるので注意が必要です.

例題 2-3
次の級数が収束することを示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{(eq3)}$$

[解答]

第 n 項までの和を S_n とし, $T_n = S_{2n}$ と置く. まずは T_n が収束することを示す.

$$T_n = T_{n-1} + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \geqq T_{n-1}$$

より $\{T_n\}$ は単調増加であり,

$$\begin{aligned} T_n &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n} \leqq 1, \\ T_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

従って $\{T_n\}$ は有界でもある. 定理 1-3 から $\{T_n\}$ は収束し, その極限値を T とする. 次に

$$R_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ が奇数のとき}, \\ 0 & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

と置く. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0, \qquad S_n = T_{[\frac{n}{2}]} + R_n$$

が成り立つ. ただし, $[\frac{n}{2}]$ は $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数を表す. 以上より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_{[\frac{n}{2}]} + \lim_{n\to\infty} R_n = T$$

となり, 級数 (eq3) は T に収束する.

□

[コメント] 上の証明では級数 (eq3) が収束することは分かっても極限値までは分かりません. この極限値の計算方法については, テイラーの定理の応用として後の授業ノートで紹介する予定です.

問題 2-2 次の級数が収束することを示せ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

問題 2-3 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つことを示せ.