教養の微積（３回目)

３．関数の極限と連続関数

今回は関数の極限と連続性について解説します．また連続関数の重要な性質である中間値の定理について紹介します.

定義 3-1 (関数の極限)
関数 $f(x)$ において, x が a とは異なる値をとりながら a に近づくとき, $f(x)$ が一定の値 A に近づくとする．このとき,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{または} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a)$$

で表し, この値 A を $x \to a$ **のときの** $f(x)$ **の極限値**という.

関数

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \text{ のとき}, \\ 1 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

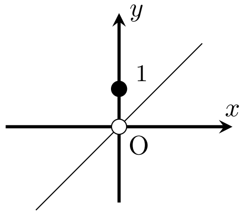
を考えます．$x \neq 0$ で $f(x) = x$ より, x が 0 に近づくと, $f(x)$ は 0 に近づきます．よって

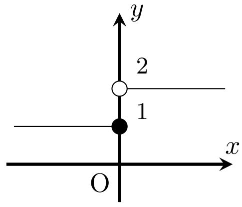
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

この例から, 必ずしも $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ は成立しないことが分かります．次に関数

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \text{ のとき}, \\ 1 & x \leqq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を考えます．$x > 0$ において x を 0 に近づけると, $f(x)$ は 2 に近づき, 一方, $x < 0$ において x を 0 に近づけると, $f(x)$ は 1 に近づきます．よって, $x = 0$ への近づけ方で $f(x)$ の近づく値が変わるので, $f(x)$ は $x = 0$ で極限値を持ちません.





定理 3-1

$\lim_{x \to a} f(x) = A, \ \lim_{x \to a} g(x) = B$ のとき,

(1) $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B.$

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = A - B.$

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB.$

(4) $x = a$ の近くで $f(x) \neq 0$ であり, $A \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{B}{A}.$$

定理の使い方を例題で確認します.

例題 3-1

次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \to 1} \{(x+2)(x+1)\}$ (2) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2+x}$ (3) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

[解答]

(1) について.

$$\lim_{x \to 1} \{(x+2)(x+1)\} = \lim_{x \to 1} (x+2) \times \lim_{x \to 1} (x+1) = 3 \times 2 = 6.$$

(2) について.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2+x} = \frac{\lim_{x \to 1} x}{\lim_{x \to 1} (x^2+x)} = \frac{1}{2}.$$

(3) 次のように変形する.

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \sqrt{x+1}+1.$$

従って,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \{\sqrt{x+1}+1\} = 2.$$

□

問題 3-1 次の極限値を求めよ.

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} \qquad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$$

定義 3-2 (関数の極限 2)

(1) x を $x>a$ $(x<a)$ から点 a に近づけるとき, 関数 $f(x)$ が一定の値 A に近づくなら,

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = A \quad (\lim_{x\uparrow a} f(x) = A)$$

で表し, この値を $f(x)$ の $x=a$ における**右極限** (**左極限**) という.

(2) $x\to\infty$ $(x\to-\infty)$ のとき, $f(x)$ が一定の値 A に近づくなら,

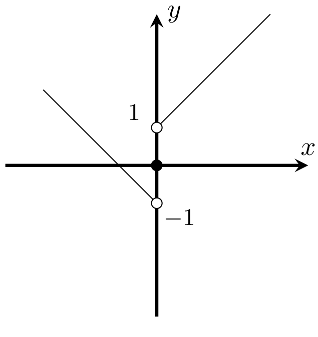
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = A)$$

で表す.

関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+1)}{|x|} & x\neq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を考えます. $x>0$ のとき, $f(x)=x+1$ より $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$. 一方, $x<0$ のとき, $f(x)=-x-1$ より $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -1$ となる.



[補足] $\lim_{x\to a} f(x) = A$ であることは, $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ と $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ がともに存在して A になることと同値である.

定義 3-2 (連続関数)

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極限値を持ち, さらに

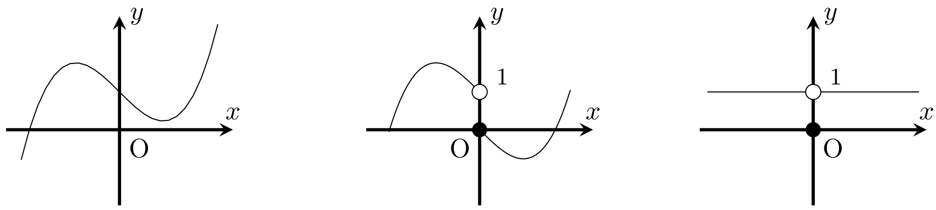
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき, $f(x)$ は $x=a$ **で 連続**という. また区間 I 上のすべての点で連続のとき, $f(x)$ は I **で 連続**という.

左下の関数はすべての点 a で $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を満たすので区間 $(-\infty, \infty)$ で連続です. 真ん中の関数は $x=0$ で極限値が存在しないので, $x=0$ で連続ではありません. 右下の関数は $x=0$ で極限値は存在しますが,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

なので, $x=0$ で連続ではありません.



代表的な連続関数の例を挙げておきます.

(1) x^2+1 のような多項式で表せる関数は $(-\infty, \infty)$ 上で連続.

(2) 指数関数 a^x と三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は $(-\infty, \infty)$ 上で連続.

(3) 対数関数 $\log_a x$ は $(0, \infty)$ 上で連続.

定理 3-2

関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 I で連続のとき,

(1) $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ は I で連続.

(2) I 上で $g(x) \neq 0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は I で連続.

例えば, x と $\sin x$ は両方とも, $(-\infty, \infty)$ 上で連続なので, 関数 $x \sin x$ も $(-\infty, \infty)$ 上連続です. 関数 $f(x) = x^2-1$ は $(1, \infty)$ 上で連続かつ $f(x) \neq 0$ なので,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2-1}$$

も $(1, \infty)$ 上で連続となります.

例題 3-2
　関数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x = 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続であることを示せ.

[解答]
$x \neq 0$ のとき, $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1$ だから

$$-|x| \leqq f(x) \leqq |x| \quad (x \neq 0).$$

$\lim_{x \to 0} |x| = 0$ より,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

従って $f(x)$ は $x = 0$ で連続.

$\square$

問題 3-2　関数

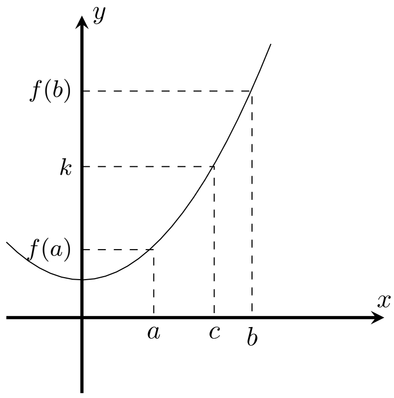
$$f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x \leqq 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続であることを示せ.

定理 3-3 (中間値の定理)
関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で連続とする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある点 k に対して，

$$f(c) = k, \quad a \leqq c \leqq b$$

を満たす c が存在する．



中間値の定理の使い方をみてみましょう．

例題 3-2
方程式 $x^3 - 2x + 5 = 0$ が区間 $[-3, 0]$ の間に実数解を持つことを示せ．

[解答]
$f(x) = x^3 - 2x + 5$ とする．このとき，

$$f(-3) = -16, \quad f(0) = 5.$$

$k = 0$ とすると，$f(-3) < k < f(0)$ を満たすので，中間値の定理より，

$$f(c) = k = 0, \quad -3 \leqq c \leqq 0$$

を満たす c が存在する．この c が例題の条件を満たす実数解となる．

□

問題 3-3　区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ の間に $\cos\alpha = \alpha$ を満たす実数 α があることを示せ．