微分積分 (1 回目) の解答

問題 1-1 の解答

(1) 0,　(2) 1.

問題 1-2 の解答

(1) について.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

(2) について.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1.$$

(3) について.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

問題 1-3 の解答

(1) まず,

$$\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{n}\times\frac{2}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{4}\times\underbrace{\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{1}}_{\text{ここを計算}}=\frac{2}{n}\times\frac{2}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{4}\times\frac{4}{3}.$$

$4\leqq k\leqq n$ のとき,

$$\frac{2}{k}\leqq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

従って,

$$0\leqq\frac{2^n}{n!}\leqq\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{n-3\text{ 個}}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{2^{n-3}}\times\frac{4}{3}.$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-3}}\times\frac{4}{3}=0$$

より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

copyright © 大学数学の授業ノート

(2) について.

$$\sqrt[n]{2^n+3^n} = 3 \times \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}.$$

ここで,

$$1 \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \leqq 2 \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

より,

$$1 \leqq \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \leqq 2^{\frac{1}{n}} \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3 \times \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3.$$

問題 1-4

(1) $n = 1$ のときは正しい. $n = k$ のとき正しいとすると, $0 \leqq a_k \leqq 2$ より $2 \leqq a_k + 2 \leqq 4$. 従って

$$\sqrt{2} \leqq \sqrt{a_k + 2} \leqq 2.$$

よって $0 \leqq a_{k+1} \leqq 2$. 従って $n = k + 1$ のときも正しい. 以上より (1) が示せた.

(2) $0 \leqq a_n \leqq 2$ より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{a_n + 2} - a_n \\ &= \frac{(\sqrt{a_n+2} - a_n)(\sqrt{a_n+2} + a_n)}{\sqrt{a_n+2} + a_n} \\ &= \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{a_n+2} + a_n} \geqq 0. \end{aligned}$$

よって $\{a_n\}$ は単調増加である.

(3) (1), (2) より $\{a_n\}$ は有界かつ単調増加であるから, $\{a_n\}$ は収束する. その極限値を α とすると,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{\alpha + 2}.$$

これを解いて $\alpha = 2, -1$. ここで, $a_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, ...)$ より $\alpha \geqq 0$. 以上より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$