教養の微積 (2 回目) の解答

問題 2-1 の解答

(1) 第 n 項までの和を S_n とおくと,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \times \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} + \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}.$$

従って

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n + 2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 4.$$

(2) 第 n 項までの和を S_n とおく.

$$\frac{8}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{4}{2k-1} - \frac{4}{2k+1}$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{2k-1} - \frac{4}{2k+1}\right) \\
&= \left(\frac{4}{1} - \cancel{\frac{4}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{4}{3}} - \cancel{\frac{4}{5}}\right)\cdots + \left(\cancel{\frac{4}{2n-1}} - \frac{4}{(2n+1)}\right) \\
&= 4 - \frac{4}{(2n+1)}.
\end{aligned}$$

従って

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 4.$$

(3) 第 n 項までの和を S_n とおく.

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right)\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

問題 2-2 の解答

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ の第 n 項までの和を S_n とおくと,

$$S_{n+1} = S_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \geqq S_n$$

より $\{S_n\}$ は単調増加である. 一方, $n \geqq 4$ のとき,

$$\frac{2^n}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-3}} \times \frac{4}{3}$$

に注意する (問題 1-3 の解答を参照). よって

$$\begin{aligned} 0 \leqq S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} &\leqq 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{4}{3} \times \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-3}} \\ &\leqq \frac{19}{3} + \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right) \\ &\leqq \frac{19}{3} + \frac{4}{3} \\ &\leqq \frac{23}{3}. \end{aligned}$$

従って $\{S_n\}$ は有界でもある. 従って $\{S_n\}$ は収束し, つまり, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ は収束する.

問題 2-3 の解答

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 項までの和を S_n と置く. 仮定より $\{S_n\}$ は収束するので, その極限値を S とすると,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$