教養の微積 (3 回目) の解答

問題 3-1 の解答

(1) について.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{\lim_{x\to1}(x^2+x+1)}{\lim_{x\to1}(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

(2) 次のように変形する.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\sqrt{x+3}+2.$$

従って,

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\{\sqrt{x+3}+2\}=4.$$

(3) 2 倍角の公式を用いて次のように変形する.

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\cos x.$$

従って

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}2\cos x=2.$$

問題 3-2 の解答

$\displaystyle\lim_{x\downarrow0}\left\{-\frac{1}{x}\right\}=-\infty$ より,

$$\lim_{x\downarrow0}f(x)=\lim_{x\downarrow0}2^{-\frac{1}{x}}=0.$$

一方,

$$\lim_{x\uparrow0}f(x)=\lim_{x\uparrow0}0=0.$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$. 従って $f(x)$ は $x=0$ で連続である.

問題 3-3 の解答

関数 $f(x)=\cos x-x$ を考える. このとき,

$$f(0)=1>0,\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0.$$

$k=0$ とすると, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<k<f(0)$ を満たすので, 中間値の定理より,

$$f(\alpha)=k=0,\qquad 0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 α が存在する. $\cos\alpha=\alpha$ より, この α が問題の条件を満たす実数である.