群論 (第 9 回)

9. 同型

今回は群の同型の概念について説明します.

定義 9-1 (同型)
G_1, G_2 を群とする. 準同型写像 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ が**同型**であるとは, f が全単射であることを言う. また, G_1 から G_2 に同型写像が存在するとき, G_1 と G_2 は**同型**であると言い, $G_1 \simeq G_2$ で表す.

同型な群の例を挙げておきます.

例題 9-1
$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

を考える. このとき, $\mathbb{C}^\times \simeq G$ を示せ.

[解答]
これを示すには, $\mathbb{C}^\times$ から G への同型写像を見つければよい. そこで, 写像

$$f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow G \quad \left(a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right)$$

が同型写像になることを示す.

(i) $a, b \in \mathbb{C}^\times$ とすると,

$$f(ab) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = f(a)f(b).$$

従って f は準同型である.

(ii) $a, b \in \mathbb{C}^\times$ とし, $f(a) = f(b)$ とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = f(a) = f(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

なので $a=b$. 従って f は単射である.

(iii) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G \quad (a \in \mathbb{C}^\times)$ に対して,

$$f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

よって f は全射.

以上より, f は同型写像である. 従って $\mathbb{C}^\times \simeq G$.

□

問題 9-1 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える. このとき, $\mathbb{C} \simeq G$ を示せ. (注: $\mathbb{C}$ には足し算による演算, G には行列の掛け算による演算が入る).

定理 9-1
群の同型写像 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ を考える. このとき, 逆写像 $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ も同型写像である. 特に, $G_1 \simeq G_2$ ならば $G_2 \simeq G_1$ が成り立つ.

[証明]

(i) 集合論の一般論から $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ も全単射である.

(ii) f^{-1} が準同型を示す. $y_1, y_2 \in G_2$ をとる. $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{G_2}$ と f が準同型であることから,

$$f(f^{-1}(y_1 y_2)) = y_1 y_2 = f(f^{-1}(y_1)) f(f^{-1}(y_2)) = f(f^{-1}(y_1) f^{-1}(y_2)).$$

f は単射だから, $f^{-1}(y_1 y_2) = f^{-1}(y_1) f^{-1}(y_2)$. 従って f^{-1} は準同型である.

以上より f^{-1} は同型写像である.

□

群 G_1 と G_2 が同型というのは, 群として構造が全く同じということを意味しています. 例えば, 次のことが言えます.

定理 9-2

G_1 と G_2 を同型な群とし, $f : G_1 \longrightarrow G_2$ を同型写像とする.

(1) G_1 がアーベル群 $\Longleftrightarrow$ G_2 がアーベル群.

(2) G_1 が巡回群 $\Longleftrightarrow$ G_2 が巡回群.

(3) $x \in G_1 \Longrightarrow |x| = |f(x)|$.

[証明]

(1) 定理 9-1 より $\Longrightarrow$ を示せば十分である. $y_1, y_2 \in G_2$ とする. f は全射より,

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2 \quad (x_1, x_2 \in G_1)$$

と表せる. G_1 はアーベル群より $x_1 x_2 = x_2 x_1$ なので,

$$y_1 y_2 = f(x_1)f(x_2) = f(x_1 x_2) = f(x_2 x_1) = f(x_2)f(x_1) = y_2 y_1.$$

よって, G_2 もアーベル群である.

(2) 問題 9-2 を参照のこと.

(3) $|x| = n$ のとき, $|f(x)| = n$ を示す.

(i) $f(x)^n = f(x^n) = f(1_{G_1}) = f_{G_2}$.

(ii) $f(x)^l = 1_{G_2}$ $(l \in \mathbb{N})$ とする. このとき,

$$f(x^l) = f(x)^l = 1_{G_2} = f(1_{G_1}).$$

f は単射だから $x^l = 1_{G_1}$ である. $|x| = n$ より $l \geq n$.

(i), (ii) より $|f(x)| = n$.

□

例題 9-2

S_3 と $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は同型でないことを示せ.

[解答]

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ はアーベル群だが, S_3 はアーベル群でない. 従って, 定理 9-2 (1) より, S_3 と $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は同型でない.

□

問題 9-2 定理 9-2 (2) を示せ.

問題 9-3 $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は同型でないことを示せ (注: $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{R}^\times$ には掛け算による演算が入る).