群論 (第 9 回) の解答

問題 9-1 の解答

写像 f を次で定める.

$$f : \mathbb{C} \to G \ \left(x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(i) $x, y \in \mathbb{C}$ とする.

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x)f(y)$$

より f は準同型.

(ii) $x, y \in \mathbb{C}$ $(f(x) = f(y))$ とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) = f(y) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より $x = y$. 従って f は単射.

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ $(x \in \mathbb{C})$ をとる. このとき, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 従って f は全射.

以上 (i)-(iii) より f は同型写像である. 従って, $\mathbb{C} \simeq G$.

問題 9-2 の解答

定理 9-1 より $\Rightarrow$ のみ示せばよい. G_1 は巡回群より, $G_1 =< x >$ $(x \in G_1)$ と表せる. $G_1 \simeq G_2$ より, 同型写像 $f : G_1 \to G_2$ が存在する. このとき, $G_2 =< f(x) >$ を示す. $b \in G_2$ とする. f は全射より, $f(a) = b$ を満たす $a \in G_1$ をとれる. $a \in G_1 =< x >$ より $a = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ とかけるので,

$$b = f(a) = f(x^n) = f(x)^n \in < f(x) > .$$

よって $G_2 =< f(x) >$. 従って G_2 は巡回群である.

問題 9-3 の解答

$\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{R}^\times$ と仮定する. このとき, 同型写像 $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times$ が存在する. i の $\mathbb{C}^\times$ での位数は 4 より, 定理 9-3 (3) から $f(i)$ の $\mathbb{R}^\times$ における位数も 4 である. 一方,

$$f(i)^4 = f(i^4) = f(1) = 1$$

であり, $f(i)$ は実数だから $f(i) = \pm 1$. どちらの場合も $f(i)$ の $\mathbb{R}^\times$ における位数は 2 以下となり矛盾. 従って $\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{R}^\times$ は同型でない.