# 教養の微積 (4 回目)

## 4. 微分係数と導関数

今回から関数の微分についてみていきます.

**定義 4-1 (微分係数)**
関数 $f(x)$ と実数 $a$ に対して

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能という. また, この極限値を $x=a$ における**微分係数**と言い, $f'(a)$ で表す.

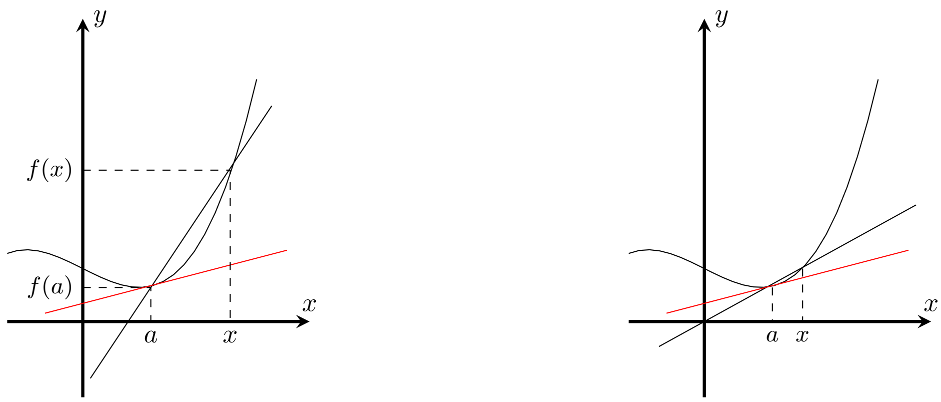
微分の意味について考えます. 下図における赤線は $x=a$ における $y=f(x)$ の接線を表しています. 左下図の黒の直線は $(a,f(a))$ と $(x,f(x))$ を通る直線で傾きは

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

で与えられます. ここで, $x$ を $a$ に近づけると, 右下図のようにこの直線は接線に近づきます. つまり, 微分係数

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{(eq1)}$$

は $f(x)$ の $x=a$ での接線の傾きを与えることが分かります.




**[補足]** $h=x-a$ と置く. $x\to a$ のとき $h\to 0$ より, 等式 (eq1) は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と書き換えられる.

□

関数 $f(x) = x^2$ に対して $f'(1)$ を計算してみます.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

従って $f'(1) = 2$ となります.

**例題 4-1**

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考える.

(1) $f'(2)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x = 2$ での接線を求めよ.

[解答]

(1) について.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

(2) $f(x)$ の $x = 2$ における接線は傾き $-\frac{1}{4}$ で, また点 $(2, f(2)) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ を通るので,

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \iff y = -\frac{x}{4} + 1.$$

□

**問題 4-1** 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ を考える.

(1) $f'(3)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x = 3$ での接線を求めよ.

**例 4-1**

関数 $f(x) = x^n$ ($n$ : 自然数) と実数 $a$ に対して $f'(a) = na^{n-1}$ が成り立つ.

[証明]

次のように変形する.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})}{x-a} = x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}.$$

従って

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right) = na^{n-1}.$$

□

**問題 4-2**

(1) 定数関数 $f(x) = c$ ($c$ は実数) と実数 $a$ に対して, $f'(a) = 0$ を証明せよ.

(2) 関数 $f(x) = x^n$ ($n$ は負の整数) と実数 $a$ に対して, $f'(a) = na^{n-1}$ を証明せよ.

**例題 4-2**

関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \text{ のとき}, \\ \\ 0 & x \leqq 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ. さらに $f'(0)$ を求めよ.

[解答]

$x = 0$ における微分係数を計算する.

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} x = 0, \qquad \lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

より

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

従って $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり, $f'(0) = 0$.

□

**問題 4-3** $f(x) = x|x|$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ. また $f'(0)$ を求めよ.

次に関数の連続性と微分可能性の関係をみます.

**定理 4-2**

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $f(x)$ は $x = a$ で連続である.

**[証明]**
$f(x)$ は $x=a$ で微分可能なので極限値

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在します．よって

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\} &= \lim_{x \to a}\left\{(x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\} \\
&= \lim_{x \to a}(x-a) \times \lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= 0 \times f'(a) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であり，$f(x)$ は $x=a$ で連続である．

□

**[補足]** 定理 4-2 の逆は一般的には成立しません．例えば，$f(x)=|x|$ は連続関数ですが，$f(x)$ は $x=0$ で微分できません．実際，

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x-0}{x-0} = 1, \qquad \lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

より，$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は存在しません．

□

**定義 4-2 (導関数)**
関数 $f(x)$ が区間 $I$ 上のすべての点で微分可能とする．このとき，区間 $I$ 上の関数を

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で定める．関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数** (または $f(x)$ の**微分**) と呼ぶ．

関数 $f(x)=x^n$ ($n$:整数) を考えます．例 4-1 と問題 4-2 より，$f'(x)=nx^{n-1}$ となります．

**例題 4-3**
$f(x)=\sqrt{x}$ の導関数を求めよ．

[解答]
次のように変形する.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

従って

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

□

**問題 4-4** 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ f(x) = x^2 + x \qquad (2)\ \ f(x) = \sqrt{2x+1}$$