教養の微積 (5 回目)

5. 導関数の性質

まずは導関数の定義を復習しておきます. 関数 $f(x)$ が区間 I 上で微分可能なとき, 区間 I 上の関数を

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定め, これを $f(x)$ の導関数と呼びました. 例えば, $f(x) = x^n$ (n : 整数) の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ で与えられました. 今回は導関数の基本的な性質について紹介します.

定理 5-1 (導関数の公式 1)

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ と実数 c に対して次が成立する.

(1) $(c)' = 0$.

(2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

(3) $(cf(x))' = cf'(x)$.

[証明]

ここでは, (2) のみ証明します. (1), (3) は各自で考えてみてください.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = f'(x) + g'(x).$$

よって $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

□

例題 5-1

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $f(x) = x^3 + 2x + 1$　　　(2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

[解答]
(1) について.

$$f'(x) = (x^3)' + 2(x)' + (1)' = 3x^2 + 2.$$

(2) について.

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = (x)' + (x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

□

問題 5-1 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ f(x) = x^5 + 3x^3 \qquad (2)\ \ f(x) = \frac{1+2x^2}{x^2}$$

定理 5-2 (導関数の公式 2)
区間 I 上で微分可能な関数 $f(x),\ g(x)$ に対して次が成立する.

(1) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(2) $g(x) \neq 0\ (x \in I)$ のとき,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

[証明]
(1) について.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}\right\}\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

(2) について.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\} = -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)^2}.$$

よって

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

これと (1) より,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$
$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

例題 5-2

次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ f(x) = (x^2+1)(3x+1) \qquad (2)\quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

[解答]

(1) について.

$$f'(x) = (x^2+1)'\cdot(3x+1) + (x^2+1)\cdot(3x+1)' = 2x\cdot(3x+1) + (x^2+1)\cdot 3 = 9x^2+2x+3.$$

(2) について.

$$f'(x) = \frac{(x)'\cdot(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

□

問題 5-2 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ f(x) = (x+1)\sqrt{x} \qquad (2)\ \ f(x) = \frac{1}{x^3+2x}$$

定義 5-1 (合成関数)

関数 $f(x),\ g(x)$ に対して,

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

で定まる関数を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という.

例えば, $f(x) = 2x+1,\quad g(x) = x^2+2x$ とすると

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2 + 2(2x+1) = 4x^2+8x+3$$

となります．

定理 5-3 (導関数の公式 3)
微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して次が成立する．

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

[証明]

証明のアイデアを分かり易くするため

$$f(x+h) - f(x) \neq 0 \quad (h \neq 0 \text{ が十分小さいとき}) \quad \text{(eq1)}$$

という条件下で証明します．十分小さい $h \neq 0$ に対して，

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と変形する ((eq1) の仮定を使っていることに注意)．$k = f(x+h) - f(x)$ とおく．$f(x)$ は微分可能より連続なので

$$k = f(x+h) - f(x) \to 0 \quad (h \to 0).$$

従って，

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{k \to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} = g'(f(x)).$$

また

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

以上より

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x))f'(x).$$

□

例えば，$f(x) = (x^2+1)^3$ を考えます．$g(x) = x^3$，$h(x) = x^2 + 1$ と置くと，$f(x) = g(h(x))$ であり，

$$g'(x) = 3x^2, \qquad h'(x) = 2x.$$

定理 5-3 より

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$$

と計算できます．

例題 5-3

次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ f(x) = (2x+1)^{10} \qquad\qquad (2)\quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

[解答]

(1) について.

$$f'(x) = 10(2x+1)^9 \cdot (2x+1)' = 20(2x+1)^9.$$

(2) について.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$\square$

問題 5-3 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1)\ f(x) = (x^2+1)^5 \qquad\qquad (2)\ f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$$

問題 5-4 次の極限値を $a^2, f(a^2), f'(a^2)$ を用いて表せ.

$$\lim_{x\to a} \frac{af(x^2) - xf(a^2)}{x-a}.$$