教養の微積（6回目)

6 逆関数とその微分

今回は逆関数の定義と性質について説明します．また逆関数の微分について触れます．

定義 6-1(単調関数)
関数 $f(x)$ が

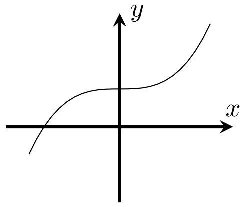
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

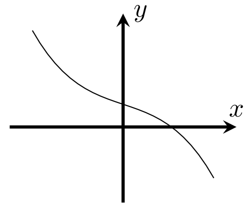
を満たすとき, $f(x)$ を**単調増加関数**と言い, また

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

を満たすとき, $f(x)$ を**単調減少関数**という.

左下図のように常に増加している関数が単調増加関数で, 右下図のように常に減少している関数が単調減少関数です.





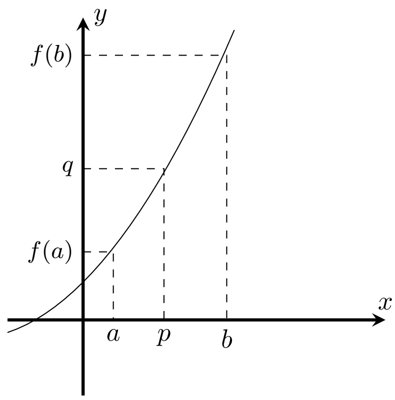
例えば, 関数 $f(x) = x^2$ は区間 $(-\infty, 0]$ で単調減少関数で, 区間 $[0, \infty)$ で単調増加関数になります.

定義 6-2 (逆関数)

区間 $[a,b]$ 上の単調増加関数 $f(x)$ を考える．このとき, 区間 $[f(a),f(b)]$ 上の実数 q に対して

$$f(p)=q, \quad a \leqq p \leqq b \quad \text{(eq1)}$$

を満たす実数 p を対応させる関数を $f(x)$ の $[a,b]$ 上の**逆関数**と呼び, $f^{-1}(x)$ で表す．単調減少関数の場合も同様に定義する．



(注意)

- 中間値の定理より (eq1) を満たす実数 p が存在し, また $f(x)$ は単調増加関数より, そのような p はただ 1 つしかない．
- 区間 $[a,b]$ 上の単調増加関数 $f(x)$ に対して, その逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $[f(a),f(b)]$ となる (単調減少関数のときは $[f(b),f(a)]$)．
- 逆関数の定義より, $f(p)=q \iff f^{-1}(q)=p$.
- $f(x)$ が連続関数のとき, $f^{-1}(x)$ も連続関数になる．

単調増加 (減少) 関数 $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ に対して, $y=f(x)$ を x について解いて $x=g(y)$ で表します． このとき, $g(x)$ が $f(x)$ の逆関数で, その定義域は $[f(a),f(b)]$ となります (単調減少のときは $[f(b),f(a)]$)．例えば,

$$f(x)=3x+5 \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

を考えると,

$$y=3x+5 \iff x=\frac{y-5}{3}$$

なので $f^{-1}(x)=\frac{x-5}{3}$ となり, 定義域は $5 \leqq x \leqq 8$ となります．

例題 6-1

次の関数の逆関数とその定義域を求めよ.

(1) $f(x) = 2x + 1 \ (1 \leqq x \leqq 2)$

(2) $f(x) = x^2 + 1 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$

[解答]

(1) について.

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2}$$

なので, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ であり, その定義域は $3 \leqq x \leqq 5$ である.

(2) $x \leqq 0$ に注意すると,

$$y = x^2 + 1 \iff x = -\sqrt{y-1}.$$

よって $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$ であり, その定義域は $1 \leqq x \leqq 5$ である.

問題 6-1 次の関数の逆関数とその定義域を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ (2) $f(x) = x^2 + 2x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

定理 6-1 (逆関数の微分)

区間 I 上の微分可能な単調増加 (減少) 関数 $f(x)$ を考える. $f'(x) \neq 0 \ (x \in I)$ が成り立てば,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

[証明]

$k = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)$ とおくと, $f^{-1}(x)$ は連続関数より

$$k = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x) \to 0 \quad (h \to 0).$$

$y = f^{-1}(x)$ とすると, $f(y) = x$ かつ $y + k = f^{-1}(x+h)$. 従って

$$f(y+k) = x + h = f(y) + h.$$

よって

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(y+k) - f(y)} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{f(y+k)-f(y)}{k}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

従って

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

□

例題 6-2
自然数 n に対して,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

[証明]
$f(x) = x^n$ とおくと,

$$y = x^n \iff y^{\frac{1}{n}} = x$$

より $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ となる. $f'(x) = nx^{n-1}$ より,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

□

問題 6-2 $f(x) = 2x^2 + 1 \ (-1 < x < 0)$ を考える.

(1) $f(x)$ の逆関数とその定義域を求めよ.

(2) $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

問題 6-3 有理数 α に対して次を示せ.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

問題 6-4 微分可能な単調増加関数 $f(x)$ を考える. $f(x)f'(x) = 1$ が成り立つとき, $f^{-1}(x)$ の微分を求めよ.