教養の微積 (4回目) の解答

問題 4-1 の解答

(1) について.

$$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(2) $f(x)$ の $x=3$ における接線は傾き $\frac{\sqrt{3}}{6}$ で, 点 $(3, f(3)) = \bigl(3, \sqrt{3}\bigr)$ を通るので,

$$y-\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x-3) \iff y = \frac{\sqrt{3}x}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

問題 4-2 の解答

(1) について.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a}0 = 0.$$

よって $f'(x)=0$.

(2) $m=-n$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}\\ &= -\frac{(x^m-a^m)}{x^m a^m(x-a)}\\ &= -\frac{(x-a)(x^{m-1}+x^{m-2}a+\cdots+a^{m-1})}{x^m a^m(x-a)}\\ &= -\frac{x^{m-1}+x^{m-2}a+\cdots+a^{m-1}}{x^m a^m}.\end{aligned}$$

従って

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{-ma^{m-1}}{a^{2m}} = -ma^{-m-1} = na^{n-1}.$$

問題 4-3 の解答

$x=0$ における微分係数を計算する.

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0}x = 0, \qquad \lim_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{-x^2-0}{x-0} = \lim_{x\uparrow 0}-x = 0$$

より

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

従って $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり, $f'(0) = 0$.

問題 4-4 の解答

(1) について.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2 + h}{h} = 2x + h + 1.$$

従って

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + 1.$$

(2) について.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})}{h(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}}.
\end{aligned}$$

従って

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$