

教養の微積 (6回目) の解答

問題 6-1 の解答

(1) について.

$$y = \frac{1}{x+3} \iff x = \frac{1}{y} - 3$$

より $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 3$ であり, その定義域は $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

(2) $x \geq 0$ に注意すると,

$$y = x^2 + 2x \iff x = -1 + \sqrt{y+1}.$$

$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x+1}$ であり, その定義域は $0 \leq x \leq 3$.

問題 6-2 の解答

(1) $x < 0$ より,

$$y = 2x^2 + 1 \iff x = -\sqrt{\frac{y-1}{2}}.$$

よって

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

であり, その定義域は $1 < x < 3$.

(2) $f'(x) = 4x$ より,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{4f^{-1}(x)} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{x-1}}.$$

問題 6-3 の解答

$\alpha = \frac{n}{m}$ (n : 整数, m : 自然数) と表す. $f(x) = x^n$, $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$ とおくと $x^\alpha = g(f(x))$ より

$$(x^\alpha)' = f'(x)g'(f(x)) = nx^{n-1} \cdot \frac{1}{m}(x^n)^{\frac{1}{m}-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

問題 6-4 の解答

逆関数の定義から $f(f^{-1}(x)) = x$ に注意する. $1 = f(x)f'(x)$ に $f^{-1}(x)$ を代入すると,

$$1 = f(f^{-1}(x))f'(f^{-1}(x)) = xf'(f^{-1}(x)).$$

従って

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = x.$$