教養の微積 (10 回目)

10. 関数の増減と高次導関数

まずは導関数を用いて関数の増減について調べます.

定理 10-1

関数 $f(x)$ が区間 (a, b) で微分可能とする.

(1) (a, b) で $f'(x) > 0$ のとき, $f(x)$ は (a, b) で単調増加する.

(2) (a, b) で $f'(x) < 0$ のとき, $f(x)$ は (a, b) で単調減少する.

[証明]

(1) $a < x_1 < x_2 < b$ とする. 平均値の定理より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がある. $x_2 - x_1 > 0$ かつ $f'(c) > 0$ なので $f(x_1) < f(x_2)$. よって $f(x)$ は (a, b) で単調増加.

(2) も同様. $\square$

例題 10-1

関数 $f(x) = e^x - x - 1$ $(x > 0)$ は単調増加関数であることを示せ.

[証明]

$x > 0$ より

$$f'(x) = e^x - 1 > 0.$$

定理 10-1 より $f(x)$ は単調増加関数である.

$\square$

問題 10-1 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(x) = \tan x - x$ は単調増加することを示せ.

例題 10-2
関数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値, 最小値を求めよ.

[証明]
$f(x)$ を微分すると,
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$
よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{5}$

よって $x = -1$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$, $x = 1$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ をとる.

$\square$

問題 10-2 次の関数の最大値と最小値を求めよ.

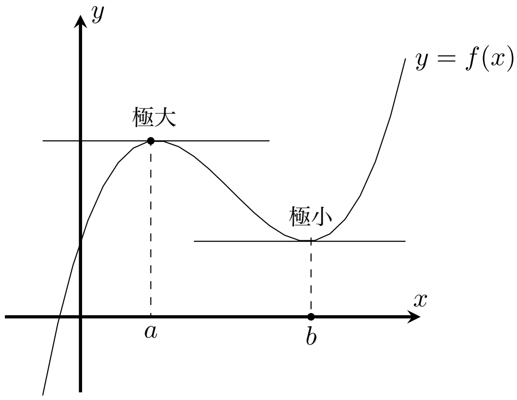
(1) $f(x) = x^3 - 3x$ $(0 \leqq x \leqq 3)$
(2) $f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

定義 10-1 (極大値と極小値)
$f(x)$ をある区間上で定義された連続関数とする.

(1) $f(x)$ が $x = a$ を境に増加から減少に転じるとき, $f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるという. そのときの $f(a)$ を**極大値**という.
(2) $f(x)$ が $x = a$ を境に減少から増加に転じるとき, $f(x)$ は $x = a$ で**極小**になるという. そのときの $f(a)$ を**極小値**という.

極大値と極小値を合わせて**極値**という.

下図において, $f(x)$ は $x=a$ を境に増加から減少に転じるので極大となり, $x=b$ を境に減少から増加に転じるので極小となります. また極値において $f'(x)$(=接線の傾き) は 0 になります.



例題 10-3
関数 $f(x)=x^4-4x^3$ の極値を求めよ.

[解答]
$f(x)$ を微分すると,

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3).$$

よって $f'(x)=0$ となるのは $x=0,3$ のとき. $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$

$f(x)$ は $x=3$ を境に減少から増加に転じるので, $x=3$ で極小値 -27 をとる.

$\square$

[注意] 例題 10-3 で $f'(0)=0$ だが, $f(x)$ は $x=0$ で極値になっていない. 一般的に $f'(a)=0$ であっても $f(a)$ が極値になるとは限らない.

定義 10-2 (高次導関数)

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能とする．このとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の 2 **次導関数**といい，$f''(x)$ で表す．

(2) $f(x)$ が n 回微分可能とする．このとき，$f(x)$ を n 回微分した関数を $f(x)$ の n **次導関数**といい，$f^{(n)}(x)$ で表す．さらに $f^{(n)}(x)$ が連続関数のとき，$f(x)$ を C^n **級関数**という．

(3) $f(x)$ が何回でも微分可能のとき，$f(x)$ を C^∞ **級関数**という．

$f(x) = x^3 + x$ のとき，

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 3x^2 + 1, \quad f^{(2)}(x) = f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6.$$

問題 10-3

(1) $f(x) = e^{2x}$ と置くとき，$f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ を求めよ．

(2) $f(x) = x \sin x$ と置くとき，$f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ を求めよ．

2 次導関数は極値の判定に用いることができます.

定理 10-2

$f(x)$ を C^2 級関数とする．

(1) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ のとき，$f(x)$ は $x = a$ で極小となる．

(2) $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ のとき，$f(x)$ は $x = a$ で極大となる．

[証明]

証明は次回に回します.

□

例題 10-4

$f(x) = x \log x \quad (x > 0)$ の極値を求めよ．

[証明]

まず,

$$f'(x) = \log x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

よって極値の候補は

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}.$$

$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$ より, $f(x)$ は $x = \frac{1}{e}$ で極小値 $-\frac{1}{e}$ をとる.

$\square$

問題 10-4　$f(x) = x\cos x - \sin x + x^2$ の極値を求めよ.