教養の微積 (11 回目)

11. テイラーの定理とその応用

今回はテイラーの定理の証明と使い方について解説します.

定理 11-1 (テイラーの定理)

$f(x)$ は開区間 I 上の C^n 級関数とする. a, b を I の異なる点とするとき,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \qquad (1)$$

を満たす c が a と b の間に存在する.

※ $n = 1$ のとき, 等式 (1) は $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$ となり, 平均値の定理と一致する.

[証明]

実数 K を次を満たすようにとる.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{K}{n!}(b-a)^n. \qquad (2)$$

このとき, $K = f^{(n)}(c)$ を満たす c が a と b の間にあることを示せばよい. 関数

$$F(x) = f(x) - f(b) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{K}{n!}(b-x)^n$$

を考える. このとき, $F(a) = F(b) = 0$ である. よって平均値の定理から

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = 0$$

を満たす c が a と b の間にとれる.

また, $F(x)$ の微分は次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
F'(x) = f^{(1)}(x) &+ \left\{ f^{(2)}(x)(b-x) - f^{(1)}(x) \right\} \\
&+ \left\{ \frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2 - f^{(2)}(x)(b-x) \right\} \\
&+ \cdots \\
&+ \left\{ \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} \right\} \\
&- \frac{K}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \\
&= \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{K}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

$F'(c) = 0$ より $f^{(n)}(c) = K$ が従う. □

定義 11-1

定理 11-1 において, a を固定し, $x = b$ とすると,

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n
$$

を満たす c_x が a と x の間にとれる. このとき,

$$
P_{n-1}(x,a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
$$

を $f(x)$ の $x = a$ における $n-1$ **次近似多項式**と呼び,

$$
R_n(x,a) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n
$$

を n **次剰余項**と呼ぶ.

※ $R_n(x,a)$ は $(x-a)^n$ という因子を持つので, $x = a$ の近くでは小さくなる. つまり, $x = a$ の近くにおいて $f(x)$ は $P_{n-1}(x,a)$ で近似される. 例えば, $n = 2$ の場合を考えると,

$$
P_1(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a)
$$

であり, これは $f(x)$ の $x = a$ での接線の式を表す. つまり, $f(x)$ は $x = a$ の近くで接線で近似でき, その誤差は $R_2(x,a)$ となる.

$f(x)=x^2$ を考えると,

$$f^{(1)}(x)=2x,\quad f^{(2)}(x)=2,\quad f^{(3)}(x)=0.$$

よって

$$f^{(0)}(1)=f(1)=1,\quad f^{(1)}(1)=2,\quad f^{(2)}(1)=2.$$

従って, $x=1$ における $f(x)$ の 2 次近似多項式は

$$P_2(x,1)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k=1+2(x-1)+(x-1)^2$$

であり, 3 次剰余項は

$$R_3(x,1)=\frac{f^{(3)}(c_x)}{3!}(x-1)^3=0$$

となります.

問題 11-1　$f(x)=e^x$ を考える.

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x=0$ における 2 次近似多項式 $P_2(x,0)$ と 3 次剰余項 $R_3(x,0)$ を求めよ.

テイラーの定理を用いて $\sin x$ の近似式を与えます.

例題 11-1

$f(x)=\sin x$ を考える.

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x=0$ における 2 次近似多項式 $P_2(x,0)$ を求めよ.

(3) $-0.1<x<0.1$ のとき, $|\sin x-x|<0.001$ を示せ.

[解答]

(1) について.

$$f^{(1)}(x)=\cos x,\quad f^{(2)}(x)=-\sin x,\quad f^{(3)}(x)=-\cos x.$$

(2) について.

$$f^{(0)}(0)=f(0)=0,\quad f^{(1)}(0)=1,\quad f^{(2)}(0)=0$$

より,

$$P_2(x,0)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=x.$$

(3) テイラーの定理より,

$$\sin x=P_2(x,0)+R_3(x,0)=x+R_3(x,0).$$

と表せる．ここで,

$$R_3(x,0)=\frac{f^{(3)}(c_x)}{3!}x^3=\frac{-\cos(c_x)}{6}x^3.$$

ただし, c_x は x と 0 の間にある．$|x|<0.1$ かつ $|\cos(c_x)|\leqq 1$ なので,

$$|\sin x-x|=|R_3(x,0)|=\frac{|\cos(c_x)|}{6}|x|^3<\frac{1}{6}\times(0.1)^3<0.001.$$

□

問題 11-2 $f(x)=\log(1+x)$ を考える.

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x=0$ における 2 次近似多項式 $P_2(x,0)$ を求めよ.

(3) 次を示せ.

$$0.095<\log\left(\frac{11}{10}\right)<0.096.$$

テイラーの定理を応用して, 前回の定理 10-2 の証明をします.

定理 10-2

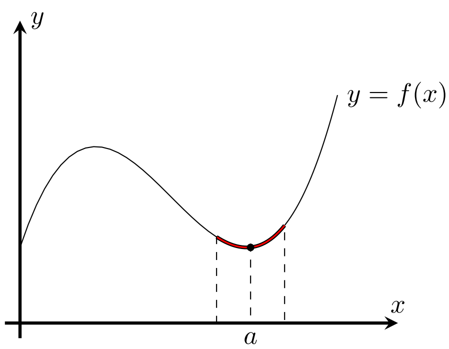
$f(x)$ を C^2 級関数とする.

(1) $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ のとき, $f(x)$ は $x=a$ で極小となる.

(2) $f'(a)=0,\ f''(a)<0$ のとき, $f(x)$ は $x=a$ で極大となる.

[証明]

(1) $f(x)$ が $x=a$ で極小であるためには, a の十分近いところで $f(a)$ が唯一の最小値となればよい.



テイラーの定理より,

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(c_x)}{2}(x-a)^2=f(a)+\frac{f^{(2)}(c_x)}{2}(x-a)^2.$$

ただし, c_x は x と a の間にある．$f^{(2)}(a)>0$ より, x が a に十分近いところで $f^{(2)}(c_x)>0$. 従って

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(2)}(c_x)}{2}(x-a)^2>f(a)\qquad(x\neq a).$$

よって a の十分近くにおいて, $f(a)$ は唯一の最小値となる.

(2) も同様である.

$\square$

問題 11-3 $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ が $x = 0$ で極小となることを示せ.