教養の微積 (12 回目)

12. テイラー展開の性質と例

今回はテイラー展開について説明します．また応用として, 級数や高次導関数の値について調べます．

定義 12-1 (テイラー展開)
$f(x)$ は a を含む開区間 I 上の C^∞ 級関数とする．このとき, 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

を $f(x)$ の $x=a$ での**テイラー級数**という．また I 上で級数 (1) が収束して $f(x)$ と一致するとき, $f(x)$ は $x=a$ で**テイラー展開可能**という．

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ を考えます．このとき,

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (n=1,2,3,...).$$

$f^{(n)}(0)=n!$ より, $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+\cdots+x^n+\cdots \qquad (2)$$

となります．等比級数の公式から, 級数 (2) は開区間 $(-1,1)$ で収束して $f(x)$ と一致します．従って $f(x)$ は $x=0$ でテイラー展開可能です．

問題 12-1　$f(x)=\frac{1}{1+2x}$ の $x=0$ でのテイラー級数を求めよ．

定理 12-1

$f(x)$ は a を含む開区間 I 上の C^∞ 級関数とする．I 上の任意の点 x に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$$

のとき，$f(x)$ は $x=a$ でテイラー展開可能である．ここで，

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n$$

であり，c_x は x と a の間にある実数である．

[証明]

テイラーの定理より，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(a,x).$$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$ より，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

□

例題 12-1

$f(x) = e^x$ とする．

(1) 実数 a に対して次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

(2) $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー級数 $P(x)$ を求めよ．

(3) $f(x) = P(x) \quad (-\infty < x < \infty)$ を示せ．

[解答]

(1) $l > 2|a|$ を満たす自然数 l を取る．$m \geqq l$ のとき，$m > 2|a|$ だから $\frac{|a|}{m} < \frac{1}{2}$．また

$$K = \frac{|a|}{l-1} \times \frac{|a|}{l-2} \times \cdots \times \frac{|a|}{1}$$

と置く．$n > l$ のとき，

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{n} \times \frac{|a|}{n-1} \times \cdots \times \frac{|a|}{l} \times K \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-l+1} \times K.$$

これより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

(2) $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$. よって

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots .$$

(3) $-\infty < x < \infty$ に対して,

$$R_n(x, 0) = \frac{e^{c_x}}{n!} x^n.$$

ただし, c_x は x と 0 の間にある. $e^{c_x} \leqq e^{|x|}$ より,

$$0 \leqq |R_n(x, 0)| = \frac{e^{c_x}}{n!} |x|^n \leqq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!}.$$

(1) より

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

従って $\lim_{n \to \infty} R_n(x, 0) = 0$. 定理 12-1 より,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{3}$$

□

[補足] 級数 (3) に $x = 1$ を代入すると次が得られる.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

問題 12-2 $f(x) = \sin x$ とする.

(1) $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー級数 $P(x)$ を求めよ.

(2) $f(x) = P(x) \quad (-\infty < x < \infty)$ を示せ.

問題 12-3 $f(x) = \log(1 + x)$ とする.

(1) $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー級数 $P(x)$ を求めよ.

(2) $f(x) = P(x) \quad (-\frac{1}{2} < x \leqq 1)$ を示せ.

(3) 次の級数の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

定理 12-2

$f(x)$ が a を含む開区間 I 上で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

と表せるとき, 右辺の級数は $f(x)$ の $x=a$ でのテイラー級数と一致する. つまり,

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \quad (m = 0, 1, 2, ...) \qquad (4)$$

が成り立つ.

[証明]

証明のアイデアを述べる. まず,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (5)$$

より $f(a) = c_0$. 次に (5) を微分すると

$$f^{(1)}(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots . \qquad (6)$$

よって $f^{(1)}(a) = c_1$. さらに (6) を微分すると

$$f^{(2)}(x) = 2c_2 + \{3 \times 2\} \cdot c_3(x-a) + \cdots$$

より $f^{(2)}(a) = 2c_2 = 2! \times c_2$. 一般的に (5) を m 回微分すると

$$f^{(m)}(x) = m!c_m + \{(m+1) \times m \cdots \times 2\} \cdot c_{m+1}(x-a) + \cdots$$

よって $f^{(m)}(a) = m! \times c_m$. これより等式 (4) を得る. □

[補足] 級数 (5) の微分が級数 (6) に一致することの証明は, 厳密には項別微分を考える必要がある (文献 [1] 定理 12.10).

定理 12-2 を利用して関数の n 回微分の値を求めてみます.

例題 12-2

$f(x) = e^{x^2}$ のとき, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

[解答]

例題 12-1 より,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

この式に x^2 を代入すると,

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < \infty). \tag{7}$$

定理 12-2 より級数 (7) は e^{x^2} の $x = 0$ でのテイラー展開と一致するので,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{n}{2}!} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

よって

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} {}_nC_{\frac{n}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

□

問題 12-4　$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ とする.

(1) $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー級数を求めよ.

(2) $f^{(n)}(0) \quad (n = 0, 1, 2, ...)$ を求めよ.

参考文献

[1] 山形大学数理科学科編, 「微分積分入門」, 裳華房.