

教養の微積 (第 10 回) の解答

問題 10-1 の解答

$f(x) = \tan x - x$ とおく. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} - 1 = \frac{1 - (\cos x)^2}{(\cos x)^2} > 0.$$

よって $f(x)$ は単調増加する.

問題 10-2 の解答

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. よって増減表は次の通り.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	0		-2		18

よって $x = 1$ のとき最小値 -2 をとり, $x = 3$ のとき最大値 18 をとる.

(2) $f(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x - 2 \cos(2x) \\ &= 2 \cos x - 2(2 \cos^2 x - 1) \\ &= 2(2 \cos x + 1)(1 - \cos x). \end{aligned}$$

$1 - \cos x \geq 0$ に注意すれば, $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	0	...	$\frac{2\pi}{3}$...	π
$f'(x)$	0	+	0	-	-
$f(x)$	0		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0

よって $x = 0, \pi$ のとき最小値 0 をとり, $x = \frac{2\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる.

問題 10-3 の解答

(1) $f^{(1)}(x) = 2e^{2x}$, $f^{(2)}(x) = 4e^{2x}$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x}$.

(2) $f^{(1)}(x) = \sin x + x \cos x$, $f^{(2)}(x) = 2 \cos x - x \sin x$, $f^{(3)}(x) = -3 \sin x - x \cos x$.

問題 10-4 の解答

まず,

$$f'(x) = x(2 - \sin x), \quad f''(x) = 2 - \sin x - x \cos x.$$

これより,

$$f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

また $f''(0) = 2 > 0$ より, $f(x)$ は $x = 0$ で極小値 0 をとる.