教養の微積 (第 11 回) の解答

問題 11-1 の解答

(1) について.

$$f^{(1)}(x) = e^x, \quad f^{(2)}(x) = e^x, \quad f^{(3)}(x) = e^x.$$

(2) について.

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 1, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 1.$$

よって 2 次近似多項式は

$$P_2(x, 0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

また 3 次剰余項は

$$R_3(x, 0) = \frac{f^{(3)}(c_x)}{3!} x^3 = \frac{e^{c_x}}{6} x^3.$$

ただし, c_x は x と 0 の間にある.

問題 11-2 の解答

(1) について.

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

(2) について.

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 2.$$

よって

$$P_2(x, 0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \frac{1}{2}x^2.$$

(3) 3 次剰余項は

$$R_3(x, 0) = \frac{f^{(3)}(c_x)}{3!} x^3 = \frac{1}{3(1+c_x)^3} x^3.$$

ただし, c_x は x と 0 の間にある. テイラーの定理より,

$$\log(1+x) = P_2(x, 0) + R_3(x, 0) = x - \frac{1}{2}x^2 + R_3(x, 0).$$

$\alpha = 0.1$ とすると,

$$\log\left(\frac{11}{10}\right) = \log(1+\alpha) = P_2(\alpha, 0) + R_3(\alpha, 0) = 0.095 + R_3(\alpha, 0). \qquad (1)$$

$0 < c_\alpha < \alpha$ より $3(c_\alpha + 1)^3 > 1$. よって

$$0 < \frac{1}{3(c_\alpha + 1)^3} < 1.$$

従って

$$0 < R_3(\alpha, 0) = \frac{1}{3(c_\alpha + 1)^3} \cdot \alpha^3 < 0.001.$$

これと等式 (1) より

$$0.095 < \log\left(\frac{11}{10}\right) < 0.096.$$

□

問題 11-3 の解答

$g(x) = \cos x$ と置くと,

$$g(x) = \cos x, \quad g^{(1)}(x) = -\sin x, \quad g^{(2)}(x) = -\cos x, \quad g^{(3)}(x) = \sin x, \quad g^{(4)}(x) = \cos x.$$

よって

$$g(0) = 1, \quad g^{(1)}(0) = 0, \quad g^{(2)}(0) = -1 \quad g^{(3)}(0) = 0,$$

テイラーの定理より,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(c_x)}{24} x^4.$$

ただし, c_x は x と 0 の間にある. $\cos(0) = 1$ より, x が a に十分近いところで $\cos(c_x) > 0$. 以上より

$$f(x) = 1 + \frac{\cos(c_x)}{24} x^4 > 1 = f(0) \qquad (x \neq 0).$$

よって $x = 0$ の十分近くで $f(0)$ は唯一の最小値となる. 従って $f(x)$ は $x = 0$ で極小値 1 を取る.