教養の微積 (12 回目) の解答

問題 12-1 の解答

$f(x)$ の n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-2)^n \cdot n!}{(1+2x)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

$f^{(n)}(0) = (-2)^n \cdot n!$ より, $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots .$$

問題 12-2 の解答

(1) $f(x)$ の n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & n = 4k \ (k : \text{整数}) \text{ のとき}, \\ \cos x & n = 4k+1 \ (k : \text{整数}) \text{ のとき}, \\ -\sin x & n = 4k+2 \ (k : \text{整数}) \text{ のとき}, \\ -\cos x & n = 4k+3 \ (k : \text{整数}) \text{ のとき}. \end{cases}$$

従って

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2m \ (m : \text{整数}) \text{ のとき}, \\ \\ (-1)^m & n = 2m+1 \ (m : \text{整数}) \text{ のとき}. \end{cases}$$

よって

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = x - \frac{x^3}{6} + \cdots .$$

(2) $-\infty < x < \infty$ に対して,

$$R_n(x, 0) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} x^n.$$

ただし, c_x は x と 0 の間にある. $|f^{(n)}(c_x)| \leqq 1$ より, 例題 12-1 (1) から

$$|R_n(x, 0)| \leqq \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって $\lim_{n \to \infty} R_n(x, 0) = 0$. 定理 12-1 より,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

問題 12-3 の解答

(1) $f(x)$ を n 回微分すると，

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

よって $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ を得る．従って

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

(2) $f(x)$ の n 次剰余項 $R_n(x, 0)$ は次で与えられる．

$$R_n(x, 0) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+c_x)^n}.$$

ここで, c_x は 0, x の間にある．

(i) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, $1 + c_x > 0$ である．$P_{n-1}(x, 0)$ を $n-1$ 次近似多項式とすると，

$$|f(x) - P_{n-1}(x, 0)| = |R_n(x, 0)| \leqq \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

(ii) $-\frac{1}{2} < x < 0$ のときを考える．$|1 + c_x| > \frac{1}{2} > |x|$ より，

$$\left| \frac{x}{1+c_x} \right| < 1.$$

従って

$$|f(x) - P_{n-1}(x, 0)| = |R_n(x, 0)| \leqq \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

(i), (ii) より，

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_{n-1}(x, 0) = P(x) \quad (-\frac{1}{2} < x \leqq 1).$$

(3) (2) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = P(1) = f(1) = \log 2.$$

問題 12-4 の解答

(1) $-1 < x < 1$ において，

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

この式の x に x^2 を代入すると，

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots .$$

さらに x をかけると,

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}+\cdots \quad (-1<x<1). \tag{1}$$

定理 12-2 より級数 (1) が $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー級数になる.

(2) 定理 12-2 より,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数のとき})\\ \\ 1 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

従って,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数のとき})\\ \\ n! & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$