環論 (第14回)

14. 商体

定義 14-1(商体)

整域 A を体 K の部分環とする. K の任意の元が

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \quad (a, b \in A,\ b \neq 0)$$

の形で表せるとき, K を A の**商体**という.

例えば, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ の商体である.

問題 14-1 $\mathbb{C}$ の 2 つの部分環

$$A = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad K = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

を考える. K は体であることを示し, さらに A の商体になることを示せ.

整域がある体に含まれている場合は次のように商体が構成できる.

定理 14-1

整域 A を体 L の部分環とする. このとき, L の部分集合

$$K = \left\{ \frac{a}{b} \ \middle|\ a, b \in A,\ b \neq 0 \right\}$$

は A の商体である.

[証明]

A の各元 x は $x = \frac{x}{1} \in K$ と表せるから $A \subseteq K$ となる. また K が定理 3-1 の部分環の条件を満たすことは容易に分かる. $z = \frac{a}{b} \in K \setminus \{0\}$ $(a, b \in A, b \neq 0)$ を取ると, $a \neq 0$ より

$$\frac{1}{z} = \frac{b}{a} \in K.$$

よって K は体である. K が A の商体になることは作り方から明らか.

$\square$

問題 14-2 定理 14-1 の状況を考える. K は A を含み, かつ L に含まれる最小の体であることを示せ.

次にどのような整域に対しても, 商体が存在することを証明する.

定理 14-2
任意の整域に対して, 商体は同型の差を除いて一意的に存在する.

[証明]
(存在) 整域 A に対して, 集合

$$R = \{(a,b) \in A^2 \mid a, b \in A,\ b \neq 0\}$$

を考える. R の関係 $\sim$ を

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

で定義すると, $\sim$ は同値関係になる. $(a,b) \in R$ の同値類を $\overline{(a,b)}$ で表し, R の $\sim$ による商集合を

$$Q(A) = \left\{\ \overline{(a,b)}\ \middle|\ (a,b) \in R\right\}$$

で表す. $Q(A)$ に演算を次で定義する.

$$\begin{cases} \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(ad+bc, bd)} \\ \\ \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} := \overline{(ac, bd)} \end{cases} \tag{1}$$

この演算が well-defined であることをみる. $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ とする. このとき, $ab' = ba'$, $cd' = dc'$ より

$$(ad+bc)(b'd') = (a'd'+b'c')bd, \qquad (ac)(b'd') = (a'c')(bd).$$

従って

$$\overline{(ad+bc, bd)} = \overline{(a'd'+b'c', b'd')}, \quad \overline{(ac, bd)} = \overline{(a'c', b'd')}.$$

演算 (1) は well-defined である. $Q(A)$ はこの演算で可換環で,

$$1_{Q(A)} = \overline{(1,1)}, \qquad 0_{Q(A)} = \overline{(0,1)}.$$

また $\overline{(a,b)} \in Q(A) \setminus \{\ \overline{(0,1)}\ \}$ とする. $a \neq 0$ より, $\overline{(b,a)} \in Q(A)$ であり,

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(b,a)} = \overline{(ab, ab)} = \overline{(1,1)} = 1_{Q(A)}.$$

従って $Q(A)$ は体である.
次に写像

$$F : A \to Q(A)\ \ \bigl(x \mapsto \overline{(x,1)}\ \bigr) \tag{2}$$

を考える. このとき, F は単射な環準同型となる (問題 14-3). F により A を $Q(A)$ の部分環と見なす. つまり, $x = \overline{(x,1)}$ $(x \in A)$ と思う. この意味で, $Q(A)$ の元 $\overline{(a,b)}$ $(a, b \in A,\ b \neq 0)$ は

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,1)} \cdot \left\{\overline{(b,1)}\right\}^{-1} = ab^{-1}.$$

と表せるので, $Q(A)$ は A の商体である.

(一意性) A の商体 K に対して, 写像

$$G: Q(A) \to K \ \left(\ \overline{(a,b)} \mapsto \frac{a}{b} \ \right)$$

を考える. このとき,

$$\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff G\Big(\overline{(a,b)}\Big) = G\Big(\overline{(c,d)}\Big).$$

よって G は well-defined かつ単射. G の全射性は定義より明らか. 次に G が環準同型であることを確認する. $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)} \in Q(A)$ に対して

$$\begin{aligned}
G\Big(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\Big) &= G\Big(\overline{(ad+bc, bd)}\Big) = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = G\Big(\overline{(a,b)}\Big) + G\Big(\overline{(c,d)}\Big), \\
G\Big(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}\Big) &= G\Big(\overline{(ac, bd)}\Big) = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = G\Big(\overline{(a,b)}\Big) \cdot G\Big(\overline{(c,d)}\Big), \\
G\Big(\overline{(1,1)}\Big) &= \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

よって G は環準同型である. 以上より G は同型写像で, $Q(A) \simeq K$ が示せた. □

問題 14-3 式 (2) の F が単射な環準同型であることを示せ.

問題 14-4 K を整域 A の商体, L を体とする. 単射な環準同型 $f: A \to L$ に対して, 環準同型 $F: K \to L$ で $F|_A = f$ を満たすものを構成せよ.