環論 (第14回) の解答

問題 14-1 の解答

(1) $\alpha = a + b\sqrt{-1} \in K$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ とする．$\alpha \neq 0$ とすれば,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\sqrt{-1} \in K.$$

従って K は体である．また, $a = \frac{n}{m}$, $b = \frac{k}{l}$ $(n, m, k, l \in \mathbb{Z},\ m \neq 0,\ l \neq 0)$ と表すと,

$$\alpha = \frac{nl + km\sqrt{-1}}{lm}, \quad nl + km\sqrt{-1} \in A, \quad lm \in A \setminus \{0\}.$$

よって K は A の商体である．

問題 14-2 の解答

M を A を含み, かつ L に含まれる体する．$\frac{a}{b} \in K$ $(a, b \in A,\ b \neq 0)$ を取る．$a, b \in A \subseteq M$ であり, M は体だから $\frac{a}{b} \in M$．よって $K \subseteq M$．従って K の最小性が示された．

問題 14-3 の解答

F が環準同型であることを示す．$x, y \in A$ として,

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \overline{(x+y,1)} = \overline{(x,1)} + \overline{(y,1)} = F(x) + F(y), \\ F(xy) &= \overline{(xy,1)} = \overline{(x,1)} \cdot \overline{(y,1)} = F(x) \cdot F(y), \\ F(1) &= \overline{(1,1)} = 1_{Q(A)}. \end{aligned}$$

よって F は環準同型．また $F(x) = 0_{Q(A)}$ とすると, $\overline{(x,1)} = \overline{(0,1)}$ より $x = 0$．従って F は単射．

問題 14-4 の解答

$z = \frac{a}{b} \in K$ $(a, b \in A,\ b \neq 0)$ を取る．f は単射より $f(b) \neq 0$ に注意する．そこで,

$$F(z) = \frac{f(a)}{f(b)}$$

と置いて, K から L への写像 F を定義する．F の well-defined 性を確認する．

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (a, b, c, d \in A,\ b \neq 0,\ d \neq 0)$$

とする．$ad = bc$ より $f(a)f(d) = f(b)f(c)$．従って

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{f(c)}{f(d)} = F\left(\frac{c}{d}\right).$$

従って F は well-defined. また $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in K$ $(a,b,c,d \in A,\ b \neq 0,\ d \neq 0)$ とすると,

$$\begin{aligned}
F\Big(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\Big) &= F\Big(\frac{ad+bc}{bd}\Big) = \frac{f(ad+bc)}{f(bd)} = \frac{f(a)f(d)+f(b)f(c)}{f(b)f(d)} = \frac{f(a)}{f(b)} + \frac{f(c)}{f(d)} = F\Big(\frac{a}{b}\Big) + F\Big(\frac{c}{d}\Big), \\
F\Big(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\Big) &= F\Big(\frac{ac}{bd}\Big) = \frac{f(ac)}{f(bd)} = \frac{f(a)f(c)}{f(b)f(d)} = \frac{f(a)}{f(b)} \cdot \frac{f(c)}{f(d)} = F\Big(\frac{a}{b}\Big) \cdot F\Big(\frac{c}{d}\Big), \\
F(1) &= F\Big(\frac{1}{1}\Big) = \frac{f(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

よって F は環準同型. また $a \in A$ に対して

$$F(a) = F\Big(\frac{a}{1}\Big) = \frac{f(a)}{f(1)} = \frac{f(a)}{1} = f(a).$$

よって $F|_A = f$ を得る.