# 線形代数 (第 2 回)

## 2 行列の演算

前回は行列とそこから派生する概念について定義しました．今回は行列の演算について紹介します．まず, 足し算 (和)・引き算 (差) は以下のように定義します．

**定義 2-1 (行列の和と差)**
同じ型の行列 $A$ と $B$ に対し, 各成分ごとに和をとったものを $A+B$ とし, 各成分ごとに差をとったものを $A-B$ とする．

例えば,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

となります．ただし，ベクトルのときに

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

などという足し算が無いのと一緒で, 行列でも

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

など型が違う行列は足せません．

**定義 2-2 (スカラー倍)**
実数 $c$ と行列 $A$ に対して, 行列 $A$ の各成分を $c$ 倍したものを $cA$ で表す．特に, $(-1)A$ は $-A$ と一致する (定義 1-4 を参照).

例えば,

$$3\begin{bmatrix}1 & -2 & 8\\ 2 & 5 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6 & 24\\ 6 & 15 & -3\end{bmatrix}$$

となります.

**例題 2-1**

次を計算せよ.

(1) $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$　　(2) $2\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

(3) ${}^t\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

[解答]

(1) $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\6\\2\end{bmatrix}.$

(2)
$$2\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4 & 0\\ 4 & -6 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -3 & 6\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-5 & 7 & -6\\ 4 & -9 & 1\end{bmatrix}.$$

(3)
$${}^t\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 1\\ 3 & 6\end{bmatrix}.$$

□

**問題 2-1** 次を計算せよ.

(1) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

次に行列の掛け算についてみます．準備として，まずは行ベクトルと列ベクトの掛け算を定義します．

**定義 2-3**

$n$ 次行ベクトルと $n$ 次列ベクトの掛け算を次で定める．

$$\begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例えば，

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$$

となります．

**問題 2-2** 次を計算せよ．

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

次に，$2 \times 2$ 型の行列の積について定義します．

**定義 2-4**

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と行列 $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ の積 $AB$ を次で定義する．

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}.$$

つまり，行列 $A$ の第 $i$ 行と行列 $B$ の第 $j$ 列の積が行列 $AB$ の $(i, j)$ 成分となる．

次の行列の積を計算してみます.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**第 $i$ 行と第 $j$ 列の積が $(i, j)$ 成分**なので,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \\ & \end{bmatrix}$$

第 1 行と第 1 列の積が $(1, 1)$ 成分

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ & \end{bmatrix}$$

第 1 行と第 2 列の積が $(1, 2)$ 成分

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \mathbf{3} & \end{bmatrix}$$

第 2 行と第 1 列の積が $(2, 1)$ 成分

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-1} \\ 2 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

第 2 行と第 2 列の積が $(2, 2)$ 成分

よって

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

**例題 2-2**

次を計算せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2$

ただし, (3) は 2 乗, すなわち同じ行列 2 つの積を表しています.

[解答]

(1) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

(2) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

定義 2-4 を拡張して，一般の型の行列の掛け算は次のように定義します．

**定義 2-5 (行列の積)**

$l \times m$ 型の行列 $A = [a_{i,j}]$ と $m \times n$ 型の行列 $B = [b_{i,j}]$ について，積 $AB = [c_{i,j}]$ は $(i,j)$ 成分が $A$ の第 $i$ 行と $B$ の第 $j$ 列の積となるように定める．つまり，

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j}$$

とする．

これだけでは何のことか良く分からないと思いますので，例題を用いて具体的に確認してみます．

**例題 2-3**

次を計算せよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

**[解答]**

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

例えばこれは第 1 行と第 2 列の積

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & \boxed{2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1} & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ 0 & -9 & 27 \end{bmatrix}.$$

第 1 行と第 1 列の積

$$
(2)\quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2\cdot 3} & 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) \\ (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) \\ 4\cdot 3 & \boxed{4\cdot 1} & 4\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & -8 \end{bmatrix}.
$$

第 3 行と第 2 列の積

$$
(3)\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 4 = -3.
$$

(これは定義 2.3 そのもの)

□

**[コメント]**

(1) 例題 2-3 の (2), (3) は掛ける順番を逆にしただけですが, 答えの行列はまったく異なります.

(2) 例題 2-3 の (1) は掛ける順を逆にすることはできません. もし逆にして

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}
$$

を計算しようとしても,

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

など, どれも計算できません. 行ベクトルと列ベクトルの長さは同じでないと積の計算ができません. つまり,

$l \times \underline{\boldsymbol{m}}$ 型の行列と $\underline{\boldsymbol{m}} \times n$ 型の行列の順でしか掛け算はできません!

**問題 2-3** 次の積は定義されるかどうかを答え, 定義される場合には計算しなさい.

$$
(1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2
$$