環論 (15回目) の解答

問題 15-1 の解答

$g = \gcd(a, b)$ と置く．$g \mid a,\ g \mid b$ より $a, b \in (g)$．よって $(a, b) \subseteq (g)$．次に逆の包含を示す．A は PID より $(a, b) = (c)$ となる $c \in A$ が取れる．このとき, $c \mid a,\ c \mid b$ で, g は a, b の最大公約元だから $c \mid g$．よって $(a, b) = (c) \supseteq (g)$．

[**コメント**] A が PID でない場合は一般的には成立しない． 例えば, $A = \mathbb{C}[x, y]$ を考えると, $\gcd(x, y) = 1$ より $(\gcd(x, y)) = A$ だが, $1 \notin (x, y)$ より $(x, y) \neq A$ ではない.

問題 15-2 の解答

(1) 環準同型

$$\varphi : A[x] \to (A/(p))[x] \quad \left(\sum_i a_i x^i \mapsto \sum_i (a_i + (p)) \cdot x^i\right)$$

は全射で，$\ker \varphi = pA[x]$．よって

$$A[x]/pA[x] \simeq (A/(p))[x].$$

(2) (p) は A の素イデアルより $A/(p)$ は整域．よって $(A/(p))[x]$ も整域である．(1) の同型から $A[x]/pA[x]$ も整域となるから, $pA[x]$ は $A[x]$ の素イデアルである．よって p は $A[x]$ の素元となる．

問題 15-3 の解答

例えば, $A = \mathbb{Z}[x]$ を考える．$\mathbb{Z}$ は UFD より, 定理 15-6 から A も UFD である．一方, 問題 12-2 から A は PID ではない.