線形代数 (第１回)

1 行列と数ベクトル

行列とは, 数を長方形の形に並べたものです. 例えば,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

数と数の間にコンマは
打ちません！

は行列です. この行列に A という名前を付けている場合は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

という書き方になります.

定義 1-1 (行列)
$m \times n$ 個の数を次のように長方形に並べた

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を $m \times n$ **行列**または, m **行** n **列の行列**などと呼ぶ. 行列 A の上から i 番目の横の並び

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

を A の**第** i **行**と呼び, 行列 A の左から j 番目の縦の並び

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を A の**第** j **列**と呼ぶ. m 本の行と n 本の列からなる行列を $m \times n$ **型**という. また, 第 i 行かつ第 j 列にある数 a_{ij} を行列 A の (i,j) **成分**という.

例題 1-1

行列

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の第 2 行は何か？

(2) 行列 A の第 4 列は何か？

(3) 行列 A の型は何か？

(4) 行列 A の $(1, 3)$ 成分は何か？

[解答]

$$(1)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (3)\ 3 \times 4 \text{ 型} \qquad (4)\ -1$$

$\square$

[解説]

(1) 行列の中で横の並びが行だから, 行列 A の場合だと,

$$\begin{aligned} \text{第 1 行は } & \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{第 2 行は } & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \\ \text{第 3 行は } & \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 行列の中で縦の並びが列だから, 行列 A の場合だと,

$$\text{第 1 列は } \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{第 2 列は } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{第 3 列は } \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{第 4 列は } \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(3) 行列 A の場合は，横の並び（すなわち行）が 3 本，縦の並び（すなわち列）が 4 本なので,「行列 A は 3×4 型」となります. $\underline{4 \times 3\text{ 型ではなく}}$ 3×4 型ですので注意して下さい. $\underline{\text{この 2 つは別物です}}$.「行の本数 $\times$ 列の本数」という順番です. 行列と言う名前の言葉通り, 前が行で後が列という順番です.

(4) 行列 A の (m,n) 成分は, A の上から m 番目の行の左から n 番目の列に有る成分のことなので,

$$
\begin{array}{llll}
(1,1)\text{ 成分} = 4, & (1,2)\text{ 成分} = 2, & (1,3)\text{ 成分} = -1, & (1,4)\text{ 成分} = 0, \\
(2,1)\text{ 成分} = -1, & (2,2)\text{ 成分} = 0, & (2,3)\text{ 成分} = 2, & (2,4)\text{ 成分} = -3, \\
(3,1)\text{ 成分} = 2, & (3,2)\text{ 成分} = 2, & (3,3)\text{ 成分} = -1, & (3,4)\text{ 成分} = 2.
\end{array}
$$

$(1,3)$ 成分と $(3,1)$ 成分のように, 書く順番が変わると違うものになりますので気を付けて下さい. これも, 前の数字が行で後の数字が列を表すという順ですので, 逆にしてしまわないよう注意が必要です.

□

問題 1-1 行列

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の型を答えよ.

(2) A の $(2,4)$ 成分を答えよ.

(3) A の第 2 行を答えよ.

(4) A の第 6 列を答えよ.

定義 1-2

(1) 全ての成分が 0 である行列

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

を**零行列**という.

(1) 行と列が共に n 本からなる行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn}. \end{bmatrix}$$

を n **次正方行列**という. 正方行列の成分のうち $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ を A の**対角成分**という. 正方行列で対角成分以外が全て 0 である行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

を**対角行列**という.

(2) 対角成分が全て等しい対角行列を**スカラー行列**という.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

特に対角成分が全て 1 のスカラー行列を**単位行列**と呼ぶ.

(3) 行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の**転置行列**と呼んで, ${}^tA$ で表す.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{のとき}, \ {}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例題 1-2

(1) 3×2 型の零行列はどのような行列か？

(2) 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ の対角成分は何か？

(3) 次の行列の中から 3 次の対角行列を全て選べ.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列の中から 3 次のスカラー行列を全て選べ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) 3 次の単位行列はどのような行列か?

(6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して，A の転置行列 ${}^{t}A$ を求めよ.

[解答]

$$(1)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)\ 4, 0, 1 \qquad (3)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)\ {}^{t}A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

[解説]

(1) 零行列とは, すべての成分が 0 の行列のことです.

(2) 正方行列は正方形の形をした行列で, 2×2 型や 3×3 型の行列のことです. 対角成分とは，対角線上の数の並びのことです. ただし,「左上から右下」の対角線のみを

指し,「右上から左下」の対角線のことではありませんので注意して下さい.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{4}} & 2 & 0 \\ -1 & \boxed{\mathbf{0}} & 2 \\ 3 & -2 & \boxed{\mathbf{1}} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & \boxed{\mathbf{0}} \\ -1 & \boxed{\mathbf{0}} & 2 \\ \boxed{\mathbf{3}} & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bigcirc \qquad\qquad\qquad \times$$

(3) 「対角成分以外の成分がすべて 0」が対角行列の定義で, 対角成分が何であるかは条件が有りません(つまり 0 でもよい)ので,

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{0}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{0}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

も対角行列となります. そんなんせこいじゃないか！と感じるかも知れませんが, 論理とはそういうものですので慣れて下さい. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ も対角行列ですが 2 次なので, この問題の答えにはなりません.

(4) スカラー行列とは, 対角成分がすべて一致している対角行列のことです.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{1}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$

は対角行列ですが, 1, -1, 2 が異なるのでスカラー行列には該当しません.

(5) 単位行列とは, 対角成分がすべて 1 のスカラー行列のことです.

(6) 行列 A の横と縦(行と列)をひっくり返してできる行列が転置行列で, ${}^tA$ と表します. ${}^tA$ は A の左肩にアルファベットの t を付けた記号です. 右肩に付けるのではありませんので注意して下さい. ちなみに, t というのは転置 (tenchi) の頭文字ではなく, transpose という英単語の頭文字です.

□

問題 1-2 行列

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) (a) の行列の対角成分は何か?

(2) (a) の行列の転置行列を求めよ.

(3) (a)-(d) のうち対角行列はどれか?

(3) (a)-(d) のうち単位行列はどれか?

定義 1-3 (数ベクトル)
行列のなかで $1 \times n$ 行列を n 次の**行ベクトル**, $m \times 1$ 行列を m 次の**列ベクトル**という．また, これらをあわせて**数ベクトル**という．成分がすべて 0 である数ベクトルを**零ベクトル**という.

例えば,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

は, それぞれ 4 次の行ベクトル，3 次の列ベクトルです.

定義 1-4 (クロネッカーのデルタ)
記号 $\delta_{i,j}$ を

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \cdots i = j \text{ のとき}, \\ 0 & \cdots i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義し, これを**クロネッカーのデルタ**と呼ぶ.

※ クロネッカーは人の名前で，デルタというのはギリシャ文字 δ のこと.

例えば,

$$\delta_{1,0} = 0, \qquad \delta_{1,1} = 1, \qquad \delta_{2,2} = 1$$
$$\delta_{2,3} = 0, \qquad \delta_{3,1} = 0, \qquad \delta_{3,3} = 1$$

となります.

例題 1-3
(i, j) 成分が $a_{ij} = \delta_{i,j}$ で与えられる 3 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ を求めよ.

[解答]
A の各成分をすべて書くと

$$\begin{aligned} &a_{11} = \delta_{1,1} = 1, && a_{12} = \delta_{1,2} = 0, && a_{13} = \delta_{1,3} = 0, \\ &a_{21} = \delta_{2,1} = 0, && a_{22} = \delta_{2,2} = 1, && a_{23} = \delta_{2,3} = 0, \\ &a_{31} = \delta_{3,1} = 0, && a_{32} = \delta_{3,2} = 0, && a_{33} = \delta_{3,3} = 1. \end{aligned}$$

よって

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

問題 1-3　(i, j) 成分が $a_{ij} = i\delta_{i,j}$ で与えられる 3 次行列 $A = [a_{ij}]$ を求めよ.

定義 1-4

(1) 同じ型の二つの行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

に対して, $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$ が成り立つとき, **行列** A, B **は等しい**と言い, $A = B$ で表す. 等しくない場合は $A \neq B$ で表す.

(2) 行列 A の成分をすべてマイナスにしてできる行列を $-A$ で表す. つまり,

$$-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

例えば,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

などです．また，

$$-\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & -3 & -2\end{bmatrix}.$$

定義 1-5 (対称行列と交代行列)

(1) 正方行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき，A を**対称行列**といいます．

(2) 正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき，A を**交代行列**といいます．

例えば，$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$ は対称行列です．なぜならば，${}^tA = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$ であり，

${}^tA = A$ だからです．

$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}$ は交代行列です．なぜならば，${}^tA = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ であり，

${}^tA = -A$ だからです．

例題 1-5

(1) 次の行列が対称行列であるよう a, b, c を求めよ．

$$\begin{bmatrix}1 & 2c+1 & 3\\ a & -2 & c\\ b & a-2 & 0\end{bmatrix}$$

(2) 次の行列が交代行列であるよう a, b, c, d を求めよ．

$$\begin{bmatrix}0 & 2c+1 & 3\\ a & b-2 & c\\ c & d-2 & 0\end{bmatrix}$$

[解答]

(1) について．

$$\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 2c+1 & -2 & a-2\\ 3 & c & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2c+1 & 3\\ a & -2 & c\\ b & a-2 & 0\end{bmatrix}$$

より $a=2c+1,\ b=3,\ a-2=c$ を連立して解いて $a=3,\ b=3,\ c=1$.

(2) について.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 2c+1 & b-2 & d-2 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2c+1 & 3 \\ a & b-2 & c \\ c & d-2 & 0 \end{bmatrix}$$

より $a=-(2c+1),\ c=-3,\ b-2=-(b-2),\ d-2=-c$ を連立して解いて $a=5,\ b=2,\ c=-3,\ d=5$.

□

問 1-4 次の行列 A が対称行列となるような $a,\ b$ を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a^2 & -1 & a^2 \\ -b & -2a+3 & 1 \end{bmatrix}$$