線形代数 (第 3 回)

3. 行列の演算 II

前回は, 行列の和 · スカラー倍 · 積の定義を説明しました. 今回は行列の計算についての注意点をまとめます. 行列の計算の中には, 普通の数の計算と同じものもありますが, まったく異なる性質のものもあるので注意が必要です.

3.1 可換性

同じ型の行列 A と B に対して $A+B=B+A$ が成り立っていることはすぐに分かります (行列の和の定義は成分ごとに足すので). 一方, 積については (AB も BA もどちらも定義される場合でも)

$AB = BA$ が成立するとは限りません.

例題で確認しておきます.

例題 3-1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して, AB と BA をそれぞれ計算せよ.

[解答]

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ (-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & (-2)\cdot 2+(-1)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1+2\cdot(-2) & (-1)\cdot 2+2\cdot(-1) \\ 2\cdot 1+3\cdot(-2) & 2\cdot 2+3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

今の例題の結果では $AB \neq BA$ となりました. この性質のせいで行列の計算は随分変わったものになります. ただし, 必ず $AB \neq BA$ だと限るわけではありません. 偶然 $AB = BA$ になることもあり, その場合には, A と B は**可換である**と言います.

問題 3-1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ が可換となるような実数 x を求めよ.

3.2 零因子とべき零行列

行列の積においては, ゼロでないものとゼロでないものの積がゼロになることがあります.

例題 3-2

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して AB を計算しなさい.

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ に対して A^2 を計算しなさい.

[解答]

$$(1)\ AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2)\ A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

例題 3-2 (1) では, A も B も零行列ではないのに AB は零行列になっています. こういう A や B のことを**零因子**と呼びます. また, 例題 3-2 (2) の A のように, 何乗かすると零行列になる行列のことを**べき零行列**と呼びます.

3.3 結合法則

同じ型の行列 A, B, C に対して $(A+B)+C = A+(B+C)$ が成り立つことはすぐに分かります (行列の和の定義は成分ごとに足すことですので, 成分ごとの数の結合法則に帰着します). 同様に行列の積についても結合法則が成り立ちます. つまり,

$$\boxed{\boldsymbol{(AB)C = A(BC)}} \qquad \text{(E1)}$$

証明の前に例題で確認しておきます.

例題 3-3

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について, $(AB)C = A(BC)$ を確認せよ.

[解答]

$(AB)C$ と $A(BC)$ をそれぞれ計算すると,

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

よって $(AB)C = A(BC)$.

□

[**E1 の証明**]

各行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{lr} \end{bmatrix} \tag{E2}$$

と表す. $(AB)C$ と $A(BC)$ の (p, q) 成分をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} (AB)C \text{ の } (p,q) \text{ 成分} &= \sum_{t=1}^{l} [AB \text{ の } (p,t) \text{ 成分}] \cdot c_{tq} \\ &= \sum_{t=1}^{l} (\sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{kt}) c_{tq} = \sum_{t=1}^{l} \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{kt} c_{tq}, \\ A(BC) \text{ の } (p,q) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{pk} \cdot [BC \text{ の } (k,q) \text{ 成分}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{pk} \sum_{t=1}^{l} b_{kt} c_{tq} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{l} a_{pk} b_{kt} c_{tq}. \end{aligned}$$

従って, $(AB)C = A(BC)$ が成立する.

□

結合法則が成り立つということは, AB を先に計算した $(AB)C$ と, BC を先に計算した $A(BC)$

は結果がどちらも同じであり, 積の並び方を変えない限りはどこから計算しても構わないということです. (つまり, 普通の数の掛け算と同じです). 本来は処理をする順番を指定しない限り意味を持たないはずの 3 つ以上の行列の積の計算は, 実はどこから計算を始めても同じなので明示的に指定する必要が無いということになります. ですから括弧を付けずに, ABC という書き方をしても構わないのです.

3.4 分配法則

普通の数の計算と同様に行列の計算でも, いわゆる分配法則が成り立ちます.

$$\boxed{\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC,\quad (A+B)C=AC+BC}} \tag{E3}$$

[E3 の証明]
(E2) と同様に A, B, C を表すと,

$$\begin{aligned}
[A(B+C) \text{ の } (i,j) \text{ 成分}] &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = [AB+AC \text{ の } (i,j) \text{ 成分}]. \\
[(A+B)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分}] &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik})c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = [AC+BC \text{ の } (i,j) \text{ 成分}].
\end{aligned}$$

よって (E2) が成り立つ.

□

例題 3-4
行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ について, A^2-AB を計算せよ.

[解答]

$$A^2-AB=A(A-B)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

□

問題 3-2 例題 3-3 の A, B について, A^3-ABA を計算せよ.

3.5 転置と演算の関係

同じ型の行列 A, B に対して ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ が成り立つことはすぐに分かります（行列の和の定義は成分ごとに足すことですので, 足してから転置しても, 転置してから足しても同じです). 次に積の場合を考えると,

$$\boxed{\boldsymbol{{}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA}} \qquad \text{(E4)}$$

となり, A と B が逆順になります.

例題 3-5

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次を計算せよ.

(1) ${}^t(AB)$ (2) ${}^tA\ {}^tB$ (3) ${}^tB\ {}^tA$

[解答]

(1) $${}^t(AB) = {}^t\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) $${}^tA\ {}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) $${}^tB\ {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

[(E4) の証明]

(E2) と同様に A, B を表すと,

$$[{}^t(AB) \text{ の } (i,j) \text{ 成分}] = [AB \text{ の } (j,i) \text{ 成分}] = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

また

$$
\begin{aligned}
[{}^tB\ {}^tA \text{ の } (i,j) \text{ 成分}] &= \sum_{k=1}^{n} [{}^tB \text{ の } (i,k) \text{ 成分}] \cdot [{}^tA \text{ の } (k,j) \text{ 成分}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [B \text{ の } (k,i) \text{ 成分}] \cdot [A \text{ の } (j,k) \text{ 成分}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}.
\end{aligned}
$$

よって ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ が成り立つ. □

問題 3-3 正方行列 $A,\ B,\ C$ に対して, ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ を示せ.

3.6 注意すべき例題

最後に, 行列の計算で注意が必要なポイントを見ておきます.

例題 3-6

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ のとき, $(A+B)(A-B)$ と $A^2 - B^2$ をそれぞれ求めよ.

[解答]
まず,

$$
A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

よって

$$
(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 11 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}.
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
A^2 - B^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ -18 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

上の例題から分かる通り,

$\boxed{\boldsymbol{A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)}}$ **は一般には成立しない！**

右辺を展開したとき, 分配法則で

$$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

となるところまでは普通の数の計算と同じなのですが, 行列の場合は $AB = BA$ が一般には成り立たないため, $-AB + BA$ の部分が消えずに残ってしまいます.

問題 3-4 行列 A, B が

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

を満たすとき, $A^2 - B^2$ を求めよ.