線形代数 (第 4 回)

4 行列と連立１次方程式

前回までで, 行列の演算の基本的な性質について説明しました. 今回からは行列を利用した連立 1 次方程式の解法について説明していきます.

4.1 係数行列・拡大係数行列

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 4y = 7 \end{cases} \qquad \cdots ①$$

は行列の方程式として

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \cdots ②$$

とも書けます. ① と ② は同等のものであり, 2 つの間は自由に行き来できます. 連立方程式 ① に対して, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ を係数行列と呼び, $\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \end{array}\right]$ を拡大係数行列と呼びます.

係数行列と拡大係数行列の一般的な定義をしておきます. 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{E1}$$

に対して, 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

を考えます．このとき, A を (E1) の**係数行列**, B を (E1) の**拡大係数行列**と呼びます．係数行列を用いると, (E1) は次のように行列の方程式で表せます．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

問題 4-1 連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 9x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{(E2)}$$

を考える．

(1) (E2) の係数行列と拡大係数行列を求めよ．

(2) (E2) を行列の方程式の形で表せ．

4.2 掃き出し法

次に,「掃き出し法」と呼ばれる行列を用いた連立 1 次方程式の解き方について説明します．まずは, 次の連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array} \right.$$

の解き方について, 一つ一つの操作を書き出してみます．

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & -y & = & -2 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array} \right. \quad \text{第 1 式に第 2 式} \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array} \right. \quad \text{第 1 式} \times(-1)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & 2 \\ x & & & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{第 2 式に第 1 式} \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -1 \\ & & y & = & 2 \end{array} \right. \quad \text{第 1 式と第 2 式を入れ替えた}$$

このとき使った操作をまとめると以下の 3 つでした．

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \text{第 } i \text{ 式に第 } j \text{ 式の } c \text{ 倍を足す} \\ (2) & \text{第 } i \text{ 式を } c \text{ 倍する \ (ただし } c \neq 0) \\ (3) & \text{第 } i \text{ 式と第 } j \text{ 式を交換する} \end{array} \right.$$

これに同等な次の 3 つの操作を行列の**基本変形**と呼びます.

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \quad \text{第 } i \text{ 行に第 } j \text{ 行の } c \text{ 倍を足す} \\ \textbf{(2)} \quad \text{第 } i \text{ 行を } c \text{ 倍する} \quad (\text{ただし } c \neq 0) \\ \textbf{(3)} \quad \text{第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 行を交換する} \end{cases}$$

先ほどの連立 1 次方程式を拡大係数行列の基本変形として書き直してみると以下の通りです.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \qquad \text{第 1 行に第 2 行 } \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \qquad \text{第 1 行 } \times(-1)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{第 2 行に第 1 行 } \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \text{第 1 行と第 2 行を入れ替えた}$$

↑ 基本変形はイコール $=$ ではなく矢印 $\longrightarrow$ で表します!

先ほどの式変形と比べると, 連立 1 次方程式を解くことは, 拡大係数行列を基本変形して単純な形に変換していき，答えが明らかな連立 1 次方程式まで変形することと解釈できます．このような考え方で連立 1 次方程式を解くことを**掃き出し法**と呼びます．掃き出し法で連立方程式を解くとき, **途中の基本変形のやり方はいろいろ有りえます**. 次の例題は今説明したのと同じ連立方程式ですが，先ほどとは違う基本変形で答えを求めています.

例題 4-1

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

を掃き出し法を用いて解け.

[解答]

拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

である．これを基本変形していくと

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \qquad \text{第 1 行に第 2 行 } \times(-2) \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{第 2 行に第 1 行} \times 2 \text{ を足した}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \qquad \text{第 1 行} \longleftrightarrow \text{第 2 行}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \text{第 2 行} \times(-1)$$

最後の行列を拡大係数行列とする連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x \qquad = -1 \\ \qquad y = 2 \end{cases}$$

であるので，与えられた連立 1 次方程式の解は $x = -1$, $y = 2$.

□

問題 4-2 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

を掃き出し法を用いて解け.

例題 4-2

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

を掃き出し法を用いて解け.

[解答]

拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

である．これを基本変形していくと

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{第 2 行に第 1 行} \times 1 \text{ を足した} \\ \text{第 3 行に第 1 行} \times(-2) \text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{第 1 行に第 3 行} \times(-1) \text{ を足した} \\ \text{第 2 行に第 3 行} \times(-3) \text{ を足した} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{第 2 行} \times(-\tfrac{1}{2})$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{第 2 行} \longleftrightarrow \text{第 3 行}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{第 1 行に第 3 行} \times 2 \text{ を足した} \\ \text{第 2 行に第 3 行} \times(-1) \text{ を足した} \end{array}$$

最後の行列を拡大係数行列とする連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x & & & = & -1 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

であるので，与えられた連立 1 次方程式の解は $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$.

□

問題 4-3 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & 3z & = & 5 \end{cases}$$

を掃き出し法で解け.